This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

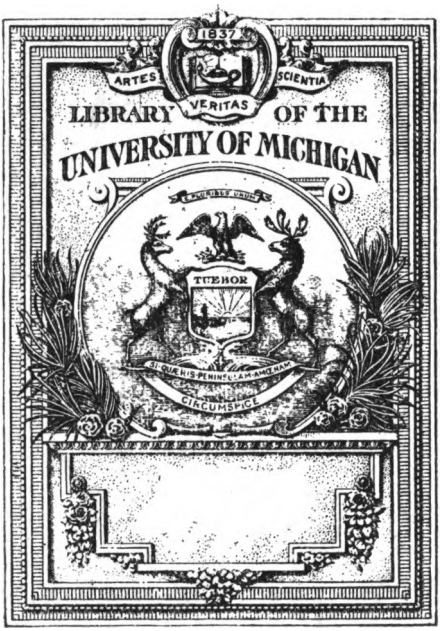
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 50721 5



Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.M56

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences Professeur à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des sciences de Liége, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS

Ut pictura mathesis
PH. BRETON.

TOME CINQUIÈME

ANNÉE 1885.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1885

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE DES AIRES PLANES;

par G. PETIT-BOIS, ingénieur civil des mines, à Liège.

I. La formule la plus célèbre pour le calcul de l'aire approchée d'une courbe plane $y = f(x)$, celle de Simpson, ne présente plus de garanties spéciales d'exactitude dans le cas où la courbure de cette courbe, ou plutôt la dérivée $f''(x)$ varie fortement d'une extrémité à l'autre de l'arc considéré(*). La parabole que Simpson substitue à la courbe ne jouit pas, en effet, de cette propriété, puisque la dérivée seconde de l'ordonnée est constante pour cette parabole. Pour obvier à cet inconvénient, dans le cas où $f''(x)$ n'est pas sensiblement constant, on peut, ou bien changer d'axes de coordonnées, ou bien remplacer la parabole de Simpson par une autre courbe, par exemple par *une hyperbole ayant une asymptote parallèle à l'axe des y*. L'hyperbole, dont la courbure varie rapidement aux environs de son sommet, a encore une équation assez simple quand l'asymptote est située comme nous l'indiquons.

Soient A (0, 0), B (h, α), C ($2h$, β), D ($3h$, γ) quatre points d'une telle hyperbole. Elle aura pour équation

$$2ahxy - bx^2 + 6h^2my - hnx = 0,$$

ou

$$y = \frac{b}{2ah}x + \frac{an - 3mb}{2a^2}\left(1 - \frac{3hm}{ax + 3hm}\right),$$

dans laquelle

$$a = 3\alpha - 3\beta + \gamma, \qquad b = 4\alpha\gamma - 3\alpha\beta - \beta\gamma,$$
$$m = 2\beta - \alpha - \gamma, \qquad n = 9\alpha\beta + \beta\gamma - 8\alpha\gamma.$$

Si $a = 0$, la courbe devient une parabole de Simpson. Si $b = 0$, l'hyperbole est équilatère. Dans le cas où $0 < \alpha < \beta < \gamma$, on peut prouver que m, n, $an - 3mb$ sont des quantités positives.

(*) P. MANSION, *Sur l'Évaluation approchée des aires planes* (*Mathesis*, t. I, supplément; ou *Annales de la Société scientifique*, t. V, 2e partie, p. 231-290).

370464

Digitized by Google

Si P, Q, R sont les projections de B, C, D sur l'axe des x, on trouve immédiatement

$$(1)\quad H = \text{aire ABCQ} = \frac{hb}{a} + \frac{h}{2a^3}(an - 3mb)\left(2a + 3m \log.\text{nép.}\frac{3m}{2a+3m}\right),$$

$$(2)\quad \text{aire PBCDR} = 2\frac{hb}{a} + \frac{h}{2a^3}(an - 3mb)\left(2a + 3m \log.\text{nép.}\frac{a+3m}{3a+3m}\right).$$

Si la première ordonnée n'est pas nulle, mais est égale à y_1, on ajoute aux valeurs précédentes $2hy_1$.

Application. Soit à chercher, à l'aide de 11 ordonnées(*), l'aire d'un quart de cercle de rayon égal à l'unité, en supposant $y_1 = 0$ à l'origine. En employant quatre fois la formule (1), puis, pour la dernière aire partielle, la formule (2), on trouve 0,7834. L'aire exacte est 0,7854; la formule de Simpson donne 0,7818, c'est à dire une erreur presque double.

II. On peut se contenter de calculer une seule aire partielle, ou plutôt un seul des segments ABC, CDE, etc., en opérant comme nous allons l'indiquer.

Menons la corde AC, qui rencontre en b_1 l'ordonnée du point B, et désignons par f_1 la flèche oblique Bb_1.

Simpson estime que le segment ABC a pour valeur $\frac{4}{3}hf_1$. Il suffit, en effet, de remplacer dans cette expression, f_1 en fonction des coordonnées des points A, B, C, puis d'opérer de même à l'égard des autres segments et enfin d'ajouter l'aire du polygone ACE..., pour arriver à la formule

$$s = \tfrac{2}{3}h(2P - 2I - E) + h(2I + E),$$

ou

$$s = \tfrac{1}{3}h(4P + 2I + E),$$

qui est la forme ordinaire de la formule de Simpson. P désigne la somme des ordonnées de rang pair, I celle des ordonnées de rang impair, E la somme des ordonnées extrêmes.

Si nous prenons pour valeur du segment ABC la quantité

$$\frac{4}{\lambda}hf_1,$$

nous arrivons à la formule

$$(3)\qquad s_1 = \frac{2}{\lambda}h(2P - 2I - E) + h(2I + E),$$

(*) E. Rouché et Ch. De Comberousse, *Traité de Géométrie*, t. I, 4e édit., p. 298.

Digitized by Google

qui peut être considérée comme la formule de Simpson généralisée. Le premier terme représente la somme des aires des segments et le deuxième l'aire du polygone ACE...

Une courbe étant donnée, nous cherchons la valeur de λ qui lui convient. A cet effet, nous choisirons le plus grand segment, c'est-à-dire celui dont la flèche oblique est la plus grande, puis nous évaluerons son aire par la formule (1). Cette aire, que nous représentons par Δ, aura pour valeur $H - \beta h$. Nous poserons ensuite $\frac{4}{\lambda} h f_1 = \Delta$, d'où nous tirerons la valeur de λ.

Selon toute probabilité, nous obtiendrons ainsi un résultat plus exact qu'en employant la formule de Simpson parce que, d'une part, le plus grand segment aura été évalué avec beaucoup d'exactitude, en faisant usage des coordonnées de quatre points de la courbe, et c'est dans l'évaluation de l'aire de ce segment que la plus forte erreur peut être commise; d'autre part, il est probable que le coefficient $\frac{1}{\lambda}$, qui convient pour le calcul du plus grand segment, conviendra mieux pour le calcul des autres que le coefficient $\frac{1}{3}$ adopté par Simpson.

Application. Dans le quart de cercle, dont il a été question ci-dessus, les flèches ont pour valeurs $f_1 = 0{,}136$, $f_2 = 0{,}014$, $f_3 = 0{,}008$, $f_4 = 0{,}006$, $f_5 = 0{,}005$. Nous calculerons donc l'aire du premier segment. On a $\alpha = 0{,}436$, $\beta = 0{,}600$, $\gamma = 0{,}714$ et la formule (1) donnera $H = 0{,}07969$, puis on aura $\Delta = H - \beta h = 0{,}01969$, et enfin $\lambda = 2{,}763$. Cette valeur étant introduite dans la formule (3), il vient $s_1 = 0{,}7837 = S - 0{,}0017$. (*A continuer.*)

REMARQUES SUR LE CERCLE OSCULATEUR A L'ELLIPSE;

par M. E. Cesaro.

1. Soit M un point d'une ellipse, dont les foyers sont F, F', et soit N le pied de la normale, sur le grand axe. La perpendiculaire menée par N à la normale, rencontre les rayons vecteurs en P, P'; les perpendiculaires élevées par ces points, aux rayons vecteurs PF, PF', se rencontrent, sur la normale MN, au centre de courbure C (*).

(*) Voir, par exemple, *Cours d'Analyse* par M. Catalan, p. 450.

Digitized by Google

Cela étant, si dans le triangle FMF', on abaisse, du point C de la bissectrice MN, les perpendiculaires CP, CP', CQ aux côtés, les droites CQ et PP' se coupent en un point R situé sur la médiane issue de M, c'est-à-dire sur le diamètre OM (*). On peut donc, pour construire le centre de courbure, élever en N la perpendiculaire à la normale, jusqu'à la rencontre en R avec le diamètre OM, puis mener par R une perpendiculaire au grand axe jusqu'à la rencontre en C avec la normale. C'est précisément la construction donnée par M. Mannheim, dans son *Cours de géométrie descriptive* (p. 175).

2. Considérons toutes les ellipses qui, passant par M, ont en ce point même centre de courbure C.

Lorsque le foyer F *parcourt une droite* MD *passant par* M, *le foyer* F' *parcourt la droite* MD' *symétrique de* MD *par rapport à la normale* MC, *et l'axe* FF' *passe par un point fixe de* MC; car la droite qui joint les projections P, P' de C sur les rayons vecteurs MF, MF' passe par le pied N de la normale sur le grand axe (n° 1)(**).

3. Soient (u, ω), (u', ω') les coordonnées polaires des points F, F', le pôle étant M et l'axe polaire MC. On a

$$\omega = -\omega', \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{u'} = \frac{2}{MP} = \frac{2}{\rho \cos \omega}. \quad (***)$$

Donc si l'on fait décrire au point F la ligne représentée par l'équation

$$f\left(\frac{1}{u}, \omega\right) = 0,$$

le point F' décrira la ligne représentée par

$$f\left(\frac{2}{\rho \cos \omega'} - \frac{1}{u'}, -\omega'\right) = 0.$$

On trouve, par exemple, que *si* F *décrit le cercle osculateur* C, F' *décrit une circonférence trois fois moindre et tangente en* M *à la courbe.*

Note. On peut définir très simplement la relation qui existe entre les

---

(*) Voir *Mathesis*, t. I, p. 117, question 40 et t. II, p. 26.

(**) Comparer la solution de la question 1482 (d'Ocagne) des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. L'article de M. Cesáro nous a eté remis en 1882.

(***) Si, par un point N de la bissectrice d'un angle, on mène une droite quelconque, la somme des inverses des segments déterminés sur les côtés de l'angle est constante.

Digitized by Google

trajectoires décrites par les foyers F, F′ d'une ellipse assujettie à avoir un contact du deuxième ordre avec un cercle fixe C, en un point donné M.

Soient f le symétrique de F′ par rapport à la normale MC. Les droites NM, MP′ étant les bissectrices de l'angle FNf, les points F, P, f, M forment une division harmonique. Donc *les points correspondants des courbes* (F), (f) *sont en ligne droite avec* M, *et conjugués harmoniques par rapport au cercle décrit sur* MC *comme diamètre* (lieu du point P). On peut dire qu'on passe de l'une des courbes à l'autre au moyen d'une transformation quadratique réversible (*).

Lorsque le point F décrit un cercle touchant en M le cercle osculateur C, le rapport FM : FP reste constant. On conclut de là que les points f et F′ se meuvent sur un autre cercle touchant C en M.

Les coordonnées des points F et f, par rapport à la tangente et à la normale en M, étant désignées par (X, Y) et (x, y), on a les formules.

$$X = \frac{\rho' xy}{x^2 + y^2 - \rho' y}, \quad Y = \frac{\rho' y^2}{x^2 + y^2 - \rho' y},$$

$2\rho'$ étant égal à MC.

Au moyen de celles-ci, on vérifie facilement que, lorsque le point F décrit une droite quelconque, le point f décrit une conique tangente à MT en M. En particulier, si le point F se meut à l'infini, la conique osculatrice se change en une parabole, dont le foyer F′ décrit un cercle ayant pour diamètre la moitié de MC. (J. N.)

×VOLUME D'UN PRISMATOIDE.

Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des planes parallèles et pour faces latérales des triangles ou des trapèzes est exprimé par la formule $\frac{1}{6}h(b + B + 4\beta)$, *dans laquelle* h *désigne la distance des deux plans parallèlles*, B *la base inférieure*, b *la base supérieure et* β *la section du polyèdre équidistante des deux bases* (**).

(*) Sur ces transformations, on peut consulter : *Nouvelle Correspondance Mathématique*, t. I, p. 54 et t. II, p. 260 (Mannheim); *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1865, p. 213 (Hirst); CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen*, 475.

(**) Ce théorème semble dû à Steiner (*Werke* II, p. 312-320) : la démonstration de l'illustre géomètre est moins naturelle que celle de M. Halsted. Voir aussi

Digitized by Google

On peut simplifier, comme il suit, d'après M. George Bruce HALSTED (*Mathematical Magazine*, n° 7), la démonstration de cette formule, donnée dans la *Géométrie* de MM. ROUCHÉ et de COMBEROUSSE (4e édition, t. II, p. 89).

Les faces latérales peuvent être subdivisées en triangles MNP. Soit O un point de la section β. On peut regarder le volume comme la somme de pyramides ayant pour bases B, b et les triangles MNP. Le volume des deux premières est évidemment $\frac{1}{6} hB + \frac{1}{6} hb$. La pyramide OMNP est égale à quatre fois la pyramide OMQR, QR étant l'intersection de la face MNP par la section β, puisque l'aire MNP = quatre fois l'aire MQR. Or OMQR $= \frac{1}{6} h \times$ OQR, et, par suite, OMNP $= \frac{4}{6} h \times$ OQR. La somme de tous les triangles analogues à OQR est égale à β; donc la somme de toutes les pyramides analogues à OMNP est $\frac{4}{6} h\beta$ (*).

Corollaire. Par passage à la limite, on étend immédiatement le théorème à un volume limité par deux faces parallèles et une surface latérale réglée ayant pour directrices les contours des deux bases (**).

(P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur la question* 313 (*Mathesis*, t. IV, p. 230) I. Cette question avait déjà été résolue analytiquement par M. Jamet dans la *Nouvelle Correspondance* (t. IV, p. 299).

La rédaction de la solution géométrique n'est pas assez *explicite*. Il a été démontré que l'*enveloppe est de 2e classe;* car, de chaque point I de CO, il ne part que deux tangentes, et la droite CO n'est pas elle-même une tangente. (J. N.)

Nouvelles Annales de Mathématiques, première série, t. VII, 1848, pp. 241-246 (Finck); 2e série, t. VI, 1867, pp. 408-410 (Girard); *Journal de Crelle*, t. XVIII, 1838, p. 275 (Koppe), t. XLV, 1853, pp. 239-245 (August). Comparez BALTZER, *Géométrie*, § 9, n° 5, où d'autres sources sont citées.

(*) Démonstration analogue dans la *Géométrie* de Legendre, édition de M. Cambier.

(**) La formule, étant un cas particulier de celle de Simpson, est encore vraie pour les volumes où la section parallèle aux bases, à la distance x de l'une d'elles, a une aire s'exprimant par la formule $a + bx + cx^2 + gx^5$, g étant nul ou non. Voir sur ce sujet, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, 1880, p. 529-551 (Maleyx).

Digitized by Google

II. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe peut être une droite, sans que cette courbe soit une parabole. Considérons, par exemple, une strophoïde ayant pour point double O et pour foyer F. Une sécante quelconque menée par F rencontre cette ligne en deux points A, A′ tels que le segment AA′ est vu de O sous un angle droit. Effectuons une transformation par polaires réciproques, en prenant un cercle directeur de centre O. Aux points A, A′ correspondent deux tangentes rectangulaires de la transformée, se coupant au pôle de la droite FAA′. Ce pôle décrit la polaire du point F par rapport au cercle directeur; donc le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la réciproque de la strophoïde est une droite. (V. JAMET.)

III. Les courbes telles que le sommet d'un angle droit circonscrit parcoure une droite (l'axe des y) sont les enveloppes de la droite $y\cos\alpha - x\sin\alpha = f(\text{tang } 2\alpha)\cos\alpha$, α étant un paramètre variable, f une fonction quelconque. (P. M.)

CORRESPONDANCE.

MONSIEUR,

Je vous prie d'annoncer que je confirme de ma part la déclaration que M. Genocchi a publiée t. IV, p. 224 du journal dirigé par vous.

J'ai rédigé moi seul l'ouvrage (*) dont il s'agit, et j'en accepte toute la responsabilité.

M. Genocchi a seulement donné sa permission, avec laquelle l'ouvrage a été commencé et achevé.

Votre tout dévoué,
G. PEANO.

BIBLIOGRAPHIE.

Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques, à l'usage des écoles moyennes, des écoles normales primaires, des athénées et des collèges par P. BRASSEUR. Lierre, chez l'auteur, rue St Gommaire, 42. Brochure in-8°. Prix : 70 centimes.

(*) ANGELO GENOCCHI. *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* publicato con aggiunte dal Dr GIUSEPPE PEANO. Roma, Torino, Firenze. Fratelli Bocca, librai di S. M. il Re d'Italia 1884. Un volume in-8° de XXXII-336 pages. Prix : Dix francs. Le cours de l'éminent professeur de Turin, publié avec additions par M. PEANO, est un ouvrage excellent : les principes de l'analyse infinitésimale y sont exposés avec une rigueur et une clarté remarquables (P. M.).

Digitized by Google

Cet opuscule de 36 pages peut rendre de grands services aux professeurs et aux élèves. La décomposition en facteurs des polynômes, trop négligée dans beaucoup de manuels, est l'un des chapitres les plus importants de l'algèbre tant au point de vue des applications que comme moyen d'initiation à la pratique du calcul littéral. L'auteur développe d'abord quelques résultats généraux de la multiplication et de la division, puis expose, d'une manière claire et méthodique, les principes qui doivent guider les commençants dans les décompositions, en facteurs, des expressions qui se présentent le plus fréquemment. Un bon choix d'exercices termine l'ouvrage. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Questions 91 et 118.

(Voir *Mathesis* t. I, p. 206, et t. II, p. 71.)

91. *Étant donnée une fraction irréductible* $\frac{A}{B}$, *de dénominateur inférieur ou égal à* n, *trouver la fraction irréductible immédiatement supérieure aussi de dénominateur inférieur ou égal à* n. (STOUVENEL.)

108. *Trouver le nombre fractionnaire de dénominateur le plus petit compris entre deux nombres incommensurables donnés différant de moins d'une unité.* (E. BELTRAMI.)

La solution de ces questions dépend de la théorie des fractions continues. Comme les propriétés des fractions convergentes intermédiaires, sur lesquelles nous nous appuierons, ne sont pas très connues, nous croyons utile de les exposer ici, sous une forme plus ou moins nouvelle.

Considérons l'expression

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}}}$$

(*) Nous avons oublié de mentionner, dans le dernier numéro, une bonne solution de la question 345 par M. Heyne.

Digitized by Google

ou, en employant une notation plus concise,

$$x = (a, b, c, \cdots p, q, y); \tag{1}$$

$a, b, c, .. p, q$ sont des nombres entiers positifs, y un nombre positif quelconque supérieur à l'unité. Soient $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites qui correspondent aux quotiens incomplets p, q, et posons

$$\frac{R_k}{R'_k} = \frac{Qk + P}{Q'k + P'}. \tag{2}$$

Nous avons, évidemment,

$$\frac{R_0}{R'_0} = \frac{P}{P'}, \qquad \frac{R_\infty}{R'_\infty} = \frac{Q}{Q'}, \qquad \frac{R_y}{R'_y} = x.$$

Principe I. Si l'on fait croître k d'une manière continue de 0 à ∞, la fraction $\frac{R_k}{R'_k}$ varie, d'une manière continue et toujours dans le même sens, entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$.

En effet, si l'on remplace y par des nombres croissants, $q + \frac{1}{y}$ décroît, (p, q, y) croît avec y, etc.; donc x va en croissant, lorsque $\frac{P}{P'}$ est une réduite de rang impair, et en décroissant, dans le cas contraire. La proposition peut encore se conclure de l'égalité

$$\frac{R_k}{R'_k} - \frac{Q}{Q'} = \frac{\pm 1}{Q'(Q'k + P')}.$$

Principe II. La différence entre les fractions $\frac{R_k}{R'_k}$, $\frac{R_l}{R'_l}$ est une fraction ayant pour numérateur $l - k$ et pour dénominateur le produit des dénominateurs des fractions considérées (*).

Car

$$\frac{R_l}{R'_l} - \frac{R_k}{K'_k} = \frac{Ql + P}{Q'l + P'} - \frac{Qk + P}{Q'k + P'} = \frac{(l - k)(QP' - Q'P)}{R'_l R'_k} = \frac{\pm (l - k)}{R'_l R'_k}.$$

(*) k et l sont supposés entiers et positifs. Le cas de $l = \infty$ doit être traité directement : $\frac{R_k}{R'_k} - \frac{Q}{Q'} = \frac{\pm 1}{R^k Q'}$.

Digitized by Google

Conséquences. I.

$$\frac{R_{k+1}}{R'_{k+1}} - \frac{R_k}{R'_k} = \frac{\pm 1}{R'_k R_{k+1}}.$$

II. Les fractions $\frac{R_k}{R'_k}$ sont irréductibles.

Principe III. Si une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ est comprise entre deux fractions consécutives $\frac{R_k}{R'_k}$ et $\frac{R_{k+1}}{R'_{k+1}}$, ses termes sont, respectivement, plus grands que R_{k+1} et R'_{+1}.

En effet, par hypothèse, on a (en valeur absolue) :

$$\frac{R_k}{R'_k} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{R_{k+1}}{R'_{k+1}} - \frac{R_k}{R'_k}, \quad \text{ou} \quad \frac{R_k\beta - R'_k\alpha}{R'_k\beta} < \frac{1}{R'_k R'_{k+1}}.$$

Comme $R_k\beta - R'_k\alpha$ est au moins égal à l'unité, on a nécessairement $\beta > R'_{k+1}$.

Si l'on observe que $\frac{\beta}{\alpha}$ est compris entre $\frac{R'_k}{R_k}$ et $\frac{R'_{k+1}}{R_{k+1}}$, on démontre de la même manière que $\alpha > R_{k+1}$.

On peut encore énoncer autrement ce principe : Si $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ sont deux fractions telles que $AB' - A'B = \pm 1$, il n'existe aucune fraction à termes plus simples que ceux de ces fractions, et qui soit comprise entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$.

×*Question* 91. Convertissons la fraction donnée $\frac{A}{B}$ en fraction continue et soit

$$\frac{A}{B} = (a, b, \ldots p, q, r).$$

Considérons la suite(*)

$$\frac{R_0}{R'_0} = \frac{P}{P'}, \quad \frac{R_1}{R'_1}, \quad \frac{R_2}{R'_2}, \quad \ldots, \quad \frac{R_r}{R'_r} = \frac{A}{B}, \quad \frac{R_{r+1}}{R'_{r+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{R_\infty}{R'_\infty} = \frac{Q}{Q'}.$$

Si le nombre des quotients $a, b, \ldots, r$ est impair, la suite est crois-

(*) Les notations sont celles qui ont été employées ci-dessus.

Digitized by Google

sante (principe I). La fraction $\frac{R_{r+1}}{R'_{r+1}}$ est irréductible et plus grande que $\frac{A}{B}$, et il n'existe aucune fraction à dénominateur plus petit que R'_{r+1} et comprise entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{R_{r+1}}{R'_{r+1}}$ (principe III). Donc, si $R'_{r+1} \leqq n$, la fraction $\frac{R_{r+1}}{R'_{r+1}}$ répond à la question. Lorsque $R'_{r+1} > n$, le problème n'a pas de solution.

Supposons les quotients $a, b, \cdots r$ en nombre pair. Il est facile de voir que la fraction $\frac{R_{r-1}}{R'_{r-1}}$ satisfait au problème.

×*Question* 118. Soient A et B deux irrationnelles ayant une différence moindre que l'unité. Convertissons-les en fraction continue; soient $a, b, .., p, q$ les quotients incomplets communs, α et β les premiers quotients différents, de sorte que

$$A = (a, b, \ldots, p, q, \alpha, \ldots), \quad B = (a, b, \ldots, p, q, \beta, \ldots).$$

Formons les fractions (α est supposé $< \beta$)

$$\frac{R_1}{R'_1}, \quad \frac{R_2}{R'_2}, \quad \ldots, \quad \frac{R_\alpha}{R'_\alpha}, \quad \frac{R_{\alpha+1}}{R'_{\alpha+1}}, \quad \ldots$$

D'après le principe I, A est compris entre $\frac{R_\alpha}{R'_\alpha}$ et $\frac{R_{\alpha+1}}{R'_{\alpha+1}}$, B entre $\frac{R_\beta}{R'_\beta}$ et $\frac{R'_{\beta+1}}{R'_{\beta+1}}$; par suite, $\frac{R_{\alpha+1}}{R'_{\alpha+1}}$ tombe entre A et B, même lorsque $\beta = \alpha + 1$. Je dis maintenant que $\frac{R_{\alpha+1}}{R'_{\alpha+1}}$ est la fraction cherchée. En effet, si $\frac{M}{N}$ est une fraction quelconque comprise ente A et B, elle tombe nécessairement entre deux fractions consécutives de la suite

$$\frac{R_\alpha}{R'_\alpha}, \quad \frac{R_{\alpha+1}}{R'_{\alpha+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{R_\beta}{R'_\beta}, \quad \frac{R_{\beta+1}}{R'_{\beta+1}},$$

et par conséquent (principe III), $N > R'_{\alpha+1}$. (J. N.)

M. Van den Broeck a envoyé une solution exacte, mais moins précise que la précédente, de la question 118.

Digitized by Google

*Question 337.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 120.)

Mener dans une ellipse une normale de longueur donnée. (Cl. THIRY.)

Solutions géométriques. Le problème revient à construire un triangle ABC dont on connaît la base BC (égale à la distance des foyers), la somme des deux autres côtés (égale au grand axe) et la bissectrice AD de l'angle A.

I. *Solution par MM.* E. LEMOINE, THIRIART, HENRARD. Si l'on désigne par a, b, c les côtés du triangle ABC, on a

$$\overline{AD}^2 = AC.AB - BC.DB = bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2}$$

d'où

$$bc = \frac{\overline{AD}^2.(b+c)^2}{(b+c)^2 - a^2}.$$

On connaît donc $b+c$ et bc.

II. *Solution par MM.* GOB, ROERSCH, FALISSE. Soient I le centre du cercle inscrit et E celui du cercle exinscrit qui touche intérieurement le côté BC. On a

$$\frac{AI}{DI} = \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{DB+DC}.$$

D'après cela, on tire une droite égale à AD; on la divise additivement et soustractivement dans le rapport $(b+c) : a$, et sur la distance des deux points de division comme diamètre, on décrit une circonférence. Celle-ci devant passer par B et C, il reste à mener par D une corde égale à a.

III. *Solution par M.* GOB. Connaissant $b+c+a$ et $b+c-a$, on peut déterminer les segments compris entre le sommet A et les points I', E' où le côté AB touche le cercle inscrit I et le cercle exinscrit E. La projection D' de D sur AB étant conjuguée harmonique de A par rapport à I'E', on peut marquer sur une droite quatre points correspondant aux points A, I', D', E' et construire ensuite sur AD' un triangle rectangle ayant pour hypoténuse AD. Enfin après avoir mené I'I perpendiculaire à AI' et rencontrant AD en I, on décrit le cercle de centre I et de rayon II', et l'on mène par D et par A des tangentes.

IV. *Solution par M.* CL. THIRY. On sait que la projection AD' de la normale AD sur un rayon vecteur AB est égale au demi-paramètre

Digitized by Google

de l'ellipse (Théorème de Pagès)(*). On peut donc construire le triangle rectangle ADD′ et après avoir doublé l'angle DAD′, il reste à mener par le point D de la bissectrice de l'angle BAC une droite telle que la partie comprise dans l'angle ait une longueur donnée; ce qui est un problème bien connu.

Solutions analytiques. I. *Solutions par MM.* Pisani, Keelhoff, Gob, Stuyvaert, Thiriart, Falisse. Soient (x, y) les coordonnées du point A de l'ellipse où il faut mener la normale AD. On a les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2+\frac{b^4}{a^4}x^2=\overline{AD}^2,$$

qui donnent

$$x=\frac{a^2}{bc}\sqrt{b^2-\overline{AD}^2}, \qquad OD=\frac{c^2}{a^2}x=\frac{c}{b}\sqrt{b^2-\overline{AD}^2},$$

O désignant le centre de l'ellipse. Les rayons vecteurs AB, AC sont les deux parties de $2a$ divisé dans le rapport BD : DC.

II. *Solution par M.* Pisani. Si $2b'$ est le diamètre conjugué avec OA, un théorème connu donne

$$b'=\frac{a.AD}{b}.$$

On peut donc déterminer le diamètre b' et en déduire $OA=\sqrt{a^2+b^2-b'^2}$.

III. *Solution par M.* Falisse. La solution résulte du théorème suivant, qui est peut-être nouveau :

La normale AD ***en un point*** A ***de l'ellipse est égale à l'ordonnée de cette courbe qui divise le grand axe en deux parties égales aux rayons vecteurs*** AF, AF′.

Pour démontrer ce théorème, soient (x, y) les coordonnées de A. On a :

$$\overline{AD}^2=y^2+\frac{b^4}{a^4}x^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+\frac{b^4}{a^4}x^2$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\left(a+\frac{cx}{a}\right)\left(a-\frac{cx}{a}\right)=\frac{b^2}{a^2}\cdot AF.AF'(**).$$

(*) La démonstration de ce théorème résulte de ce que les points A, I′, D′, E′, forment une division harmonique. (J. N.)

(**) Cette relation est, aux notations près, celle qui, dans la première solution, fait connaître le produit bc. (J. N.)

Digitized by Google

Or, si l'on marque sur le grand axe EE' un point P tel que EP = AF, E'P = AF', et si l'on mène par P une ordonnée rencontrant l'ellipse en M et le cercle principal en N, on sait que

$$\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot EP.E'P, \quad NP = \frac{a}{b} MP.$$

Donc MP = AD, ce qui démontre le théorème; de plus, $NP = \frac{a}{b} AD$, ce qui permet de trouver le point N, et ensuite les points P et A.

IV. *Solution par M.* Cl. Thiry. La projection AD' de AD sur AF étant égale au demi-paramètre de l'ellipse, on peut construire un triangle rectangle égal ADD'; on déterminera ainsi l'angle FAF'. Dans le triangle FAF', on connaît maintenant la base FF', l'angle opposé et la somme de deux autres côtés.

Si l'on donnait la longueur AH de la normale arrêtée au petit axe, on se rappellerait que la projection de AH sur AF est égale au demi-grand axe de l'ellipse, d'où l'on conclurait encore l'angle FAF'.

×Question 339.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 120.)

Construire un triangle ABC *connaissant la hauteur* AH, *la médiane* AM *et le rapport*

$$\frac{AB - AC}{BC} = \frac{m}{n}. \qquad \text{(Cl. Thiry.)}$$

Solution par M. Thiry. Soient D, D' les pieds des bissectrices de l'angle BAC; E, E' les points de contact de BC avec le cercle inscrit et avec le cercle exinscrit qui a son centre sur AD. Les deux divisions harmoniques (D'BDC), (HEDE')(*) donnent

$$MD.MD' = \overline{MB}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{BC}^2, \qquad MD.MH = \overline{ME}^2 = \tfrac{1}{4}(AB - AC)^2;$$

d'où

$$\frac{MD'}{MH} = \frac{\overline{BC}^2}{(AB - AC)^2} = \frac{n^2}{m^2}. \qquad (1)$$

(*) Cette division est la projection de la division harmonique formée par A, D, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle exinscrit. M est le milieu de EE', et le segment $EE' = BE - BE' = p - b - (p - c) = c - b$.

Digitized by Google

Or, on sait construire le triangle rectangle AHM et déterminer ensuite le point D′ au moyen de l'égalité (1). Si nous menons AD perpendiculaire à AD′, nous aurons les points B et C en cherchant une moyenne proportionnelle entre MD et MD′.

Solution par MM. Pisani, de Rocquigny *et* Colette. Soit k la distance HM que l'on peut considérer comme connue. Les côtés a, b, c du triangle peuvent se déduire des équations

$$\frac{c-b}{a}=\frac{m}{n}, \quad c^2-b^2=2ka, \quad c^2+b^2=\tfrac{1}{2}a^2+2\overline{AM}^2, \qquad (2)$$

dont les deux premières donnent

$$c-b=\frac{am}{n}, \qquad c+b=\frac{kn}{m}. \qquad (3)$$

Si l'on fait la somme des carrés des égalités (3), on trouve

$$c^2+b^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2m^2}{n^2}+\frac{k^2n^2}{m^2}\right)=\frac{a^2}{2}+2\overline{AM}^2,$$

d'où l'on conclut a.

Solution par M. Van den Broeck. Construisons le triangle AHM. Des égalités

$$\frac{c-b}{a}=\frac{m}{n}, \qquad c^2-b^2=2a.HM, \qquad (4)$$

on conclut

$$c+b=\frac{n}{m}HM.$$

Si l'on prolonge AM de MA′ = AM, la question est ramenée à ce problème connu : Trouver sur une droite donnée MH un point B dont la somme des distances aux points donnés A, A′ soit égale à $\frac{n}{m}$ MH.

Solution par M. Gob. Après avoir construit le triangle rectangle AHM, on peut déduire, des équations (4), la somme AB + AC. Considérons maintenant l'ellipse qui a pour foyers les sommets encore inconnus B et C, et qui passe par A. Nous pouvons décrire le cercle sur le grand axe comme diamètre et prolonger l'ordonnée AH jusqu'à la rencontre en A_1 avec ce cercle. Si nous menons ensuite par A une droite parallèle à MH et rencontrant la ligne MA_1 en K, MK sera la longueur de la moitié du petit axe de l'ellipse. Cherchons les extrémités de cet axe, et de l'une

Digitized by Google

d'elles comme centre, avec un rayon égal à la moitié du grand axe, décrivons un arc de cercle rencontrant MH en deux points; ceux-ci seront les sommets cherchés B et C.

×Question 344.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 143.)

Soient, dans la suite des nombres impairs, S_α *la somme des* α *premiers termes;* S_β *celle des* β *termes suivants;* S_γ *celle des* γ *termes qui suivent les* $(\alpha + \beta)$ *premiers; déterminer* α, β, γ, *de manière que*

$$S_\alpha S_\beta = S_\gamma.$$ (De Rocquigny.)

Solution par M. Van den Broeck. La somme des u premiers nombres impairs étant u^2, on a

$$S_\alpha = \alpha^2, \quad S_\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2, \quad S_\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha + \beta)^2;$$

par conséquent, il faut satisfaire à l'équation

$$\alpha^2 (\alpha + \beta)^2 - \alpha^4 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha + \beta)^2$$

ou

$$\alpha^2 (\alpha + \beta)^2 - \alpha^4 + (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2.$$

On trouve immédiatement deux solutions de cette question : le premier membre devient carré parfait, si l'on pose

$$\alpha + \beta = \alpha^2 \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta = \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \beta = \alpha\ (\alpha - 1), \\ \gamma = \alpha^2 (\alpha - 1), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Y a-t-il d'autres solutions?

×Question 365.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 175.)

Décomposer l'expression

$$2(a^4 + a^3 b + 4a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$$

1° *en trois carrés;* 2° *en quatre carrés.* (de Rocquigny.)

Solution par MM. Gob, Minoliti *et* Falisse. L'expression proposée peut prendre les formes

$$(a + b)^4 + (a^2 - ab)^2 + (b^2 - ab)^2,$$
$$(a^2 + b^2)^2 + (a^2 + ab)^2 + (b^2 + ab)^2 + (2ab)^2.$$

Digitized by Google

M. HENRARD trouve aussi les deux décompositions précédentes, puis celles-ci en cinq carrés :

$$(a^2 + ab + b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2 + a^2b^2 + a^2b^2 + a^2b^2,$$
$$(a^2 + ab + b^2)^2 + a^4 + b^4 + (2ab)^2 + a^2b^2.$$

×Question 377.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 216.)

Construire un quadrilatère, connaissant un angle et les distances du point d'intersection des diagonales aux quatre côtés.

Solution par M. FR. FALISSE. Soient ABCD le quadrilatère, O le point d'intersection des diagonales, M, N, P, Q les projections de O sur AB, BC, CD, DA.

Les circonférences décrites sur OA, OB, OC, OD comme diamètres passent respectivement par (M, Q), (M, N), (N, P), (P, Q). Si on les transforme par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle le point O, on obtient quatre droites perpendiculaires aux diamètres qui passent par le pôle et déterminant, par suite, un parallélogramme. Les sommets de ce quadrilatère sont les points M', N', P', Q', homologues de M, N, P, Q.

Cela posé, l'angle A étant supposé connu, on peut construire le quadrilatère OMAQ. Si l'on prend pour puissance d'inversion $\overline{OA}^2$, les points M', Q' seront à l'intersection des droites OM, OQ avec la perpendiculaire élevée par A sur OA. Menons OR égal et parallèle à M'Q'; nous aurons

$$OP' = \frac{\overline{OA}^2}{OP}, \quad RP' = ON' = \frac{\overline{OA}^2}{ON}.$$

Ces relations déterminent le point P'. La solution s'achève facilement.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**401.** Dans un triangle, si la médiane partant d'un sommet, la médiane antiparallèle partant d'un autre sommet et la hauteur partant du troisième sont concourantes, la droite qui joint les points de Brocard est parallèle à cette hauteur. (EM. LEMOINE.)

Digitized by Google

×**402.** Démontrer qu'il existe des triangles ABC autres que le triangle équilatéral et dans lesquels la hauteur partant de A, la bissectrice partant de B et la médiane partant de C sont égales. (Em. Lemoine.)

×**403.** Construire un triangle ABC connaissant CB, la longueur de la médiane partant de C et la longueur de la médiane antiparallèle partant de B. (Em. Lemoine.)

404. On donne un angle droit YOX et un cercle dont le centre C est sur la bissectrice de l'angle YOX. D'un point quelconque A de la circonférence, on mène une perpendiculaire sur OX; soit A′ le point où cette perpendiculaire rencontre la droite symétrique de OA par rapport à OC. Chercher le lieu de A′. (de Rocquigny.)

405. D'un point quelconque A de l'axe radical de deux cercles O, O′, on mène à ceux-ci respectivement les tangentes AB, AB′. Trouver le lieu du centre du cercle passant par A, B, B′. (de Rocquigny.)

×**406.** ABC étant un triangle rectangle en A, soit φ l'angle compris entre la médiane et la bissectrice menées par B. Démontrer que

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} B. \qquad \text{(Tücker.)}$$

×**407.** Soient A′, B′, C′ les points de contact des côtés du triangle ABC avec le cercle inscrit de rayon et r, et R, R′, R″, R‴ les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC, BOC, COA, AOB; K le point de concours des droites AA′, BB′, CC′. Démontrer les relations

$$R'R''R''' = 2R^2 r,$$

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{4R^3}{R'R''R'''} = \frac{2R}{r} = \frac{AK.\,BK.\,CK}{A'K.\,B'K.\,C'K}.$$

(Cl. Thiry.)

×**408.** Une sécante rencontre les côtés AB, AC du triangle ABC aux points B′, C′ et la circonférence circonscrite aux points M, N; démontrer que les cercles MBB′, MCC′ se touchent en M. (Clevers.)

×**409.** Par un point quelconque M du côté BC du triangle ABC, on décrit deux circonférences touchant respectivement, AB en B et AC en C. Trouver le lieu du second point d'intersection de ces circonférences. (J. N.)

410. Étant données deux droites rectangulaires OX, OY et une circonférence ω touchant ces droites, démontrer, par la géométrie, que le foyer d'une parabole touchant les lignes OX, OY et la circonférence ω décrit une circonférence tangente à OX et OY. (Weill.)

Digitized by Google

Démontrer que la corde de contact de la parabole avec l'angle XOY enveloppe une hyperbole équilatère ayant pour foyer le point O. (J.N.)

411. Soient OA, OB, OC trois demi-diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, et soient OA′, OB′, OC′ les demi-diamètres perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB. Trouver, entre OA′, OB′, OC′ des relations analogues aux théorèmes d'Apollonius. (J. NEUBERG.)

412. Démontrer l'identité suivante

$$\frac{m^p}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots p)} =$$

$$S \frac{1}{(1.2.3\ldots \alpha)(1.2.3\ldots \beta)\ldots(1.2.3\ldots \lambda)\,.\,2^\gamma (2.3)^\delta \ldots (2.3\ldots p)^\lambda}$$

le signe S portant sur toutes les valeurs entières, positives ou nulles, des quantités $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ qui vérifient les 2 équations simultanées

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = m.$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \cdots + p\lambda = p.$$

(WEILL.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

Relations trigonométriques entre les angles d'un triangle(*).

1. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$

2. $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2\left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right).$

3. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

4. $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A+B}{4} \cos \frac{B+C}{4} \cos \frac{C+A}{4}.$

5. $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$

(*) Extrait du *Journal danois de Mathématiques*, 1884, p. 78-80. Bon nombre de ces relations sont connues, par exemple, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 16 qui sont dans la Trigonométrie de M. Cambier; plusieurs restent vraies si $A + B + C = (2p+1)\pi$, ou $2p\,\pi + \frac{1}{2}\pi$, p étant entier.

Digitized by Google

6. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

7. $\text{tang } A + \text{tang } B + \text{tang } C = \text{tang } A \text{ tang } B \text{ tang } C$.

8. $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C + \text{cosec } A \text{ cosec } B \text{ cosec } C$.

9. $\cot mA \cot mB + \cot mB \cot mC + \cot mC \cot mA = 1$ (m entier).

10. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

11. $\text{tang } 2A + \text{tang } 2B + \text{tang } 2C = (\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C) : (1 + \cos 4A + \cos 4B + \cos 4C)$.

12. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

13. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0$.

14. $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}\cos^3\frac{C}{2}$.

15. $$\frac{\text{tang } A}{\text{tang } B} + \frac{\text{tang } B}{\text{tang } A} + \frac{\text{tang } A}{\text{tang } C} + \frac{\text{tang } C}{\text{tang } A} + \frac{\text{tang } B}{\text{tang } C} + \frac{\text{tang } C}{\text{tang } B} = \text{séc } A \text{ séc } B \text{ séc } C - 2.$$

16. $\sin A \sin (A - B) \sin (A - C) + \sin B \sin (B - A) \sin (B - C) + \sin C \sin (C - A) \sin (C - B) = \sin A \sin B \sin C - \sin 2A \sin 2B \sin 2C$.

17. $$\sin\left(C + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(B + \frac{C}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) = 4 \cos\frac{A - B}{4}\cos\frac{B - C}{4}\cos\frac{C - A}{4} - 1.$$

18. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$.

19. $\cot\frac{C}{2} = (\sin A + \sin B) : (\cos A + \cos B)$.

20. $$\sin^2 A \sin 2A + \sin^2 B \sin 2B + \sin^2 C \sin 2C = \sin 2A \sin 2B \sin 2C + \sin 2A \sin^2 B + \sin 2B \sin^2 A.$$

21. $$(\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B)(\sin C + \cos C) = 2 \sin A \sin B \sin C + 2 \cos A \cos B \cos C + 1.$$

22. $$\frac{\cot A + \cot B}{\text{tang } A + \text{tang } B} + \frac{\cot B + \cot C}{\text{tang } B + \text{tang } C} + \frac{\cot C + \cot A}{\text{tang } C + \text{tang } A} = 1.$$

(BEASLEY.)

Digitized by Google

NOTE SUR LES RACCORDEMENTS PARABOLIQUES;

d'après M. D'OCAGNE, élève-ingénieur des Ponts et chaussées, à Paris.

Apollonius a démontré, dans ses *Coniques* (III, 41), ce beau théorème : *Trois tangentes* AP'T, P'EQ', TQ'B *à une parabole, qu'elles touchent respectivement en* A, E, B, *sont divisées en segments proportionnels aux points* P', E, Q', *de sorte que* AP' : P'T = P'E : EQ' = TQ' : Q'B. On déduit de là les méthodes classiques (*) pour tracer la parabole AEB, déterminée par les deux tangentes AT, TB et les points de contact A, B. 1° Si P', Q' sont au milieu de AT, TB, E sera aussi au milieu de P'Q'; par suite, E peut être déterminé immédiatement; le même procédé appliqué à E et A, E et B donne deux nouvelles tangentes et leurs points de contact; et ainsi de suite. 2° Si AT est divisé en n parties égales aux points 1, 2, 3, ... $n-1$, à partir de A, TB aussi en n parties égales aux points 1', 2', 3', ... $(n-1)'$, à partir de T, les droites 11', 22', 33' ... enveloppent la parabole. 3° Si par un point quelconque D de AB, on mène des parallèles DQ', DP' à AT, BT, la diagonale P'Q' du parallélogramme TP'DQ' est tangente à la parabole.

Voici deux solutions différentes du problème des raccordements, dues à M. d'Ocagne; la première, au fond, dépend encore du théorème d'Apollonius, et est très simple dans la pratique; l'autre repose sur un nouveau procédé de détermination du foyer de la courbe. (P. M.)

Première solution nouvelle. Joignant le point T au milieu M du segment AB (**), nous avons la direction de l'axe de la parabole. Menons par les points A et B les parallèles $A\alpha$ et $B\beta$ à MT. Cela fait, prenons sur le segment AM un point quelconque P; portons à partir de ce point, dans le sens AB, le segment PQ égal à AM et tirons par les points P et Q les parallèles PP' et QQ' à TM; nous obtenons ainsi sur TA le point P', sur TB le point Q'. La droite P'Q' est tangente à la parabole et la touche

(*) Voir par exemple : ENDRÈS, *Manuel des Conducteurs des ponts et chaussées*, p. 104; DEBAUVE, *Guide du Conducteur des Ponts et Chaussées et du Garde-Mines*, p. 122; CLAUDEL, *Introduction à l'Art de l'Ingénieur*, 6e édition, pp. 599 et 674; VASSELON, *Carnet du Conducteur des Travaux*, 4e édition, p. 63; F. J. O. P., *Arpentage, Levé des plans et Nivellement*, p. 130; etc., etc. (M. d'Oc.)

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

Digitized by Google

en un point E tel que $P'E = M'Q'$, M′ étant le point de rencontre de P′Q′ et de TM.

En faisant varier, d'une manière continue, le point P à partir du point A, sans changer le segment PQ, qui conserve une grandeur constante, on obtient ainsi, avec la plus grande facilité, autant de tangentes que l'on veut. Les *seules* lignes de construction à faire intervenir sont des *parallèles à une direction fixe* qui est celle de TM; tout point de contact E d'une tangente P′Q′ est donné immédiatement et *sans construction.*

Si A′, B′, sont les points où P′Q′ coupe $A\alpha$, $B\beta$, le point de contact E est encore le symétrique de A′ par rapport au point P′, ou de B′ par rapport à Q′.

Nous ajouterons, au simple point de vue de la curiosité, et non à celui de la pratique, que si la normale à la parabole au point E coupe au point a' la perpendiculaire à $A\alpha$ élevée au point A′, et au point p' la perpendiculaire à AT élevée au point P′, le centre de courbure C de la parabole, relatif au point E, est le symétrique de a' par rapport à p'.

Seconde solution nouvelle. Tracé continu. Bien que dans la pratique, le procédé qui vient d'être indiqué doive être le plus commode, nous ferons encore connaître le suivant, parce qu'il permet de trouver le foyer et la directrice et, par suite, de dessiner l'arc de parabole d'un trait continu, à l'aide d'une règle, d'une équerre et d'un fil.

Le foyer nous est immédiatement fourni par le théorème suivant que nous avons donné dernièrement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. III, p. 28).

Par les points A et T élevons des perpendiculaires à AT; par les points B et T, des perpendiculaires à BT; nous formons avec ces quatre droites un parallélogramme THNI. Du sommet T abaissons la perpendiculaire TF sur la diagonale HI; F sera le foyer (*). La tangente au sommet sera la ligne qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées de F sur les deux tangentes TA, TB; la directrice sera une parallèle à cette tangente qui en est distante d'une longueur égale à la distance du foyer à la tangente au sommet.

(*) Cette construction est aussi simple que la construction classique : On élève des perpendiculaires au milieu de AT et de BT; on joint les points R, S où elles coupent TM, respectivement à A et B; AR et BS se coupent en F. De plus, elle ne devient pas illusoire, comme celle-ci, quand ABT est un angle droit ou peu différent d'un angle droit.

Digitized by Google

SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE DES AIRES PLANES;

par G. PETIT-BOIS, ingénieur civil des mines, à Liège.

(Suite et fin; voir *Mathesis*, t. V, p. 5-7.)

III. Je vais indiquer une limite de l'erreur commise en employant la formule de Simpson, limite parfois plus avantageuse que celle qui a été donnée par M. Mansion.

Supposons que l'aire de la courbe ABC...L doive être calculée à l'aide de $2n + 1$ ordonnées $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}, y_{2n+1}$. Joignons les points A et C, C et E, etc. et les points B et D, D et F, etc. Soient $f_1, f_2, f_3 \ldots, f_n$ les flèches obliques (*) des premiers segments ainsi formés et $f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n-1}$ celles des autres segments. Supposons de plus que les longueurs des flèches $f_1, f'_1, f_2, f'_2 \ldots f_n$ aillent sans cesse en décroissant. Estimons l'aire du premier segment en employant, non sa flèche f_1, mais la flèche f'_1 du segment suivant; agissons de même à l'égard du deuxième segment CDE, puis du troisième et ainsi de suite. Quant au dernier, nous lui laissons sa flèche f_n. Faisant la somme des aires obtenues, nous avons

$$\tfrac{4}{3} h (f'_1 + f'_2 + f'_3 + \cdots + f_n). \qquad (a)$$

Recommençons l'opération en sens inverse, en partant de L et marchant vers A. Nous obtenons une nouvelle somme

$$\tfrac{4}{3} h (f'_{n-1} + f'_{n-2} + \cdots + f'_1 + f_1). \qquad (b)$$

Étant admis que les quantités $\frac{4}{3} hf_1$, $\frac{4}{3} hf'_1$, etc. représentent à très peu près les aires exactes des segments, nous pourrons dire que la somme (a) est moindre que la somme exacte des segments(**); car, pour l'obtenir, nous avons négligé une partie de la courbe à l'endroit où les segments ont la plus grande valeur, et nous l'avons remplacée par la partie où cette valeur est la moindre. Pour la même raison, nous dirons que la somme (b) est plus grande que l'aire des segments. L'aire exacte et l'aire estimée suivant la formule de Simpson se trouvent donc com-

(*) La flèche oblique est la différence entre une ordonnée et la demi-somme des deux ordonnées voisines.

(**) Nous laissons à l'auteur la responsabilité de ce raisonnement. Suivant nous, si l'on se donne la peine de déterminer une limite de l'erreur commise, il faut que cette détermination soit faite d'une manière rigoureuse. (P. M.)

Digitized by Google

prises l'une et l'autre entre les sommes (a) et (b); par suite, la différence $S - s = \varepsilon'$ sera plus petite que la différence de ces sommes, ou

$$\varepsilon' < \tfrac{4}{3} h (f_1 - f_n).$$

Exprimons f_1 et f_n par les coordonnées des points A, B, C, J, K, L; on aura

$$\varepsilon' < \tfrac{2}{3} h \{ y_{2n+1} - y_1 + y_{2n-1} - y_3 - 2(y_{2n} - y_2) \}.$$

Application. Dans la recherche de l'aire de la courbe ayant pour équation $y = \log x - 3$, x variant de 1000 à 1006 et h étant égal à l'unité (*), on trouve, en dix-billionièmes

$$S = 78017128,$$

et

$$s = S.$$

L'inégalité ci-dessus indique pour limite de l'erreur

$$\varepsilon' < 23.$$

IV. Il est souvent utile de calculer les longueurs des flèches obliques avant de faire usage de la formule de Simpson. Lorsque la différence entre la plus grande et la plus petite de ces flèches est peu considérable relativement aux longueurs des flèches, on est certain que la formule de Simpson peut être employée avec sécurité. En effet, nous avons dit plus haut que si la dérivée $f''(x)$ varie peu entre les limites de l'arc considéré, le résultat fourni par la formule se rapproche beaucoup de l'aire exacte. Nous allons faire voir, en prenant un procédé de démonstration analogue à celui qui a été employé par M. P. Mansion(**), que *si $f''(x)$ varie peu de x à $x + 4h$, la différence entre les flèches f_1 et f_2 sera peu sensible.* On peut écrire

$$y_1 = f(x),$$

$$y_2 = f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x_1),$$

$$y_3 = f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + \frac{4h^2}{2} f''(x_2),$$

$$y_4 = f(x+3h) = f(x) + 3h f'(x) + \frac{9h^2}{2} f''(x_3),$$

$$y_5 = f(x+4h) = f(x) + 4h f'(x) + \frac{16h^2}{2} f''(x_4).$$

(*) P. Mansion, *Mathesis*, t. I, supplément, p. 37.
(**) Id., p. 42.

Digitized by Google

Dans ces égalités, x_1 représente une quantité comprise entre x et $x + h$, x_2 une quantité comprise entre x et $x + 2h$, etc. On en tire

$$f_1 = y_2 - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3) = \tfrac{1}{2} h^3 f''(x_1) - h^2 f''(x_2),$$
$$f_2 = y_4 - \tfrac{1}{2}(y_3 + y_5) = \tfrac{9}{2} h^3 f''(x_3) - h^2 f''(x_2) - 4h^2 f''(x_4).$$

Soit f_1 la plus grande des deux flèches et posons $D = f_1 - f_2$; il viendra

$$D = \tfrac{1}{2} h^2 \{ f''(x_1) - 9 f''(x_3) + 8 f''(x_4) \}.$$

Si $f''(x)$ varie peu de x à $x + 4h$, on aura sensiblement

$$f''(x_1) = f''(x_3) = f''(x_4),$$

et la quantité D sera presque nulle.

V. On peut même, lorsque la différence entre la plus grande et la plus petite flèche est faible, simplifier la formule de Simpson, c'est-à-dire se borner à faire passer une seule parabole par les extrémités des deux ordonnées extrêmes et de l'ordonnée moyenne.

Application. La courbe $y = \log x - 3$, dont il a été question plus haut, donne $f_1 = 2167$, $f_2 = 2159$, $f_3 = 2150$ et $f_1 - f_3 = 17$, quantité très faible relativement aux longueurs des flèches. L'aire exacte de la courbe est donnée par la formule de Simpson, avec trois ordonnées seulement.

Des considérations analogues conduisent à une autre formule, applicable dans certains cas. Si la première flèche est de beaucoup plus grande que les autres, la pratique montre que le premier segment ABC coïncide presque avec un segment AB'C formé par une parabole à axe horizontal, ayant son sommet en A et passant par C. L'aire du segment parabolique est égale à $\frac{1}{3} \beta h$. Pour le reste de la courbe, nous en calculons l'aire en faisant passer une parabole de Simpson par les extrémités des ordonnées y_3, y_{n+2}, y_{2n+1}. On trouve ainsi

$$(4) \quad v' = \tfrac{1}{3} h \{ 2y_1 + (n + 3) y_3 + 4 (n - 1) y_{n+2} + (n - 1) y_{2n+1} \}.$$

Application. Dans le quart de cercle, les valeurs des flèches données § II montrent que la formule (4) est applicable. On obtient

$$v' = 0{,}7824 = S - 0{,}0030.$$

La formule (4) deviendrait, en supposant la courbe symétrique de part et d'autre de l'ordonnée moyenne et $y_1 = 0$,

$$v'' = \tfrac{2}{3} h \{ (2 + n) y_3 + 2 (n - 2) y_{n+1} \}.$$

Digitized by Google

VI. Parmi les formules les plus connues pour le calcul des aires planes, il n'en est que deux, celle des trapèzes et celle de Simpson, qui évaluent uniformément les différents segments de la courbe. Dans les autres formules, les segments extrêmes sont calculés autrement que les segments moyens. Par exemple, dans la formule de Poncelet, le premier segment est égal à $h\left(\frac{7}{4}\alpha - \beta\right)$, tandis qu'un segment moyen a pour valeur $h(2\alpha' - \beta')$ (*). Il en résulte cet inconvénient que si l'on veut calculer séparément les deux parties d'une aire, puis faire la somme, on n'obtient pas le même résultat que si l'on avait calculé l'aire entière.

Il est facile de reconnaître que ces dernières formules donneraient des résultats fort éloignés de l'aire exacte, si l'on avait approximativement $y_1 = y_2 = y_3$ et $y_{2n-1} = y_{2n} = y_{2n+1}$. Il en serait de même si l'on avait $y_2 - y_1 = y_{2n+1} - y_{2n}$ et $y_3 - y_1 = y_{2n+1} - y_{2n-1}$. Mais on doit remarquer que ces circonstances ne se réalisent que si la courbe présent un point singulier.

NOTE.

M. H. Brocard nous signale, sur l'Évaluation approchée des aires planes, les mémoires suivants qui ont paru dans les tomes VI (1815-1816), VII (1816-1817), VIII (1817-1818), IX (1818-1819), des *Annales de Gergonne :*

Kramp. Formules nouvelles pour l'intégration approchée de toute fonction différentielle d'une seule variable entre deux limites données quelconques (t. VI, pp. 281-302).

Gergonne. Réflexions sur la méthode qui sert de base au précédent Mémoire et applications diverses de cette méthode (t. VI, pp. 303-320).

Kramp. Deuxième recueil de formules servant à intégrer toute différentielle quelconque proposée (t. VI, pp. 372-387).

Bérard. Méthode nouvelle pour quarrer les courbes, et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable (t. VII, pp. 101-116).

Kramp. Sur la manière d'intégrer, par approximation, entre deux limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable (t. VII, pp. 241-252).

Ampère. Rapport à l'Académie royale des sciences, sur le Mémoire de M. Bérard (t. VIII, pp. 117-124).

(*) Voici les valeurs des segments moyens pour diverses formules :

Trapèzes; Catalan.	$h\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)$,
Poncelet; Parmentier (1re et 2me); Dupain. .	$h(2\alpha - \beta)$,
Mansion; Saviotti	0,
Simpson.	$h\left(\frac{4}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta\right)$.

Digitized by Google

KRAMP. Recherche des formules propres à intégrer, par approximation, entre deux limites données quelconques, toute différentielle d'une seule variable (t. IX. pp. 373-396).

Les deux premiers mémoires contiennent une méthode très curieuse, due à d'Obenheim, où l'on essaie de trouver l'aire cherchée, en la regardant comme la valeur, pour $t = 0$, d'une fonction algébrique entière u de t; cette fonction prend les valeurs u_1, u_2, u_3, u_4, etc. pour $t^{-1} = 1, 2, 3, 4$, etc., u_1, u_2, u_3, u_4, ... étant les résultats obtenus pour l'aire cherchée, en employant la formule des trapèzes, quand on suppose le nombre des trapèzes inscrits égal à 1, 2, 3, 4, etc.

Les autres mémoires contiennent les formules d'intégration obtenues en remplaçant la courbe donnée, par une parabole d'ordre n, pour n variant de 1 à 12 (et même, dans celui de Bérard, *mathématicien aveugle*, pour $n = 24$ et $n = 120$) et exprimant l'aire u, au moyen d'ordonnées équidistantes, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Bérard trouve les coefficients qui entrent dans les formules au moyen des deux remarques suivantes : 1° L'expression de l'aire est de la forme $u = A(y_0 + y_n) + B(y_1 + y_{n-1}) +$ etc.; 2° les coefficients A, B, etc., peuvent s'obtenir en appliquant la formule à des paraboles spéciales d'ordre n ou d'ordre inférieur, dont il est aisé de trouver autrement l'aire exacte. Ampère prouve, dans son rapport, contrairement à ce que pensait Bérard, que la question de la détermination des coefficients A, B, etc. est un problème qui ne comporte qu'une solution.

Enfin Gergonne accompagne ces diverses mémoires d'excellentes remarques, entre autres de celle-ci : Toute formule approximative doit être accompagnée de l'indication de la limite supérieure de l'erreur qu'elle comporte.

M. BROCARD nous indique aussi une démonstration élémentaire de la formule de Simpson, par M. A. STEEN, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. X, 1871, pp. 301-304.

Notations abrégées.

Voici des notations abrégées, pour désigner les deux Journaux de Mathématiques que nous citons le plus souvent :

1° N. A. M., (2), X, 301-304, signifie : *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, tome X, pages 301-304.

2° N. C. M., III, 108. *Nouvelle correspondance Mathématique*, tome III, page 108.

Digitized by Google

SUR L'HÉLICE OSCULATRICE,

par M. Ernest Cesàro, Élève-ingénieur, étudiant à Rome (*).

I. Soient $MM' = M'M'' = ds$ deux éléments consécutifs d'une ligne à double courbure. Les plans rectifiants qui passent par ces éléments se coupent suivant la droite rectifiante G, qui fait avec les deux éléments le même angle φ.

Si, par M, on mène le plan perpendiculaire à G, ce plan rencontre G, et la parallèle à G, passant par M'', en P et en Q. On a $MP = PQ = ds \cdot \sin\varphi$. Les éléments MM', M'M'' peuvent être considérés comme appartenant à une hélice, tracée sur un cylindre de révolution, dont l'axe est parallèle à G, et dont la section droite est la circonférence MPQ. Les rayons des circonférences MM'M'', MPQ sont évidemment, si ω est l'angle des plans rectifiants,

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}, \quad R = \frac{ds \cdot \sin\varphi}{\omega}.$$

Il en résulte, à cause de la relation connue $\varepsilon = \omega \sin\varphi$,

$$R = \rho \sin^2\varphi.$$

Si r est le rayon de torsion, on peut encore écrire

$$R = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2},$$

puisque

$$r = \frac{ds}{\eta}, \quad \eta = \omega \cos\varphi.$$

Enfin, a, b, c étant les cosinus directifs de la tangente, considérés comme fonctions de s, on peut donner à la valeur de R cette autre forme :

$$R = \frac{(a'^2 + b'^2 + c'^2)^{\frac{5}{2}}}{(b'c'' - c'b'')^2 + (c'a'' - a'c'')^2 + (a'b'' - b'a'')^2}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Nous rappelons à nos lecteurs la *Note de Géométrie* de M. Cesàro, publiée dans *Mathesis*, III, p. 73-78, 97-101, 121-125. Le présent article répond partiellement à l'annonce qui termine cette *Note*. (P. M.)

Digitized by Google

II. Cette hélice joue, par rapport aux lignes à double courbure, le même rôle que la circonférence osculatrice, par rapport aux lignes planes. On peut donc l'appeler ***hélice osculatrice***. C'est une ligne, tangente en M à la ligne considérée, ayant même flexion et même torsion que celle-ci, et conservant dans tout son parcours la flexion et la torsion qu'elle a au point M. Nous appelons ***axe central*** l'axe de l'hélice osculatrice, et ***centre de double courbure*** le point où il rencontre la normale principale. On peut observer que l'axe central n'est autre que la commune perpendiculaire à deux normales consécutives, et le centre de double courbure est le pied, sur la normale, de cette commune perpendiculaire. Le lieu des centres de double courbure est donc la ligne de striction de la surface gauche formée par les normales.

III. D'après ce qui précède, on construit le centre de double courbure, correspondant à un point M d'une ligne, en portant, sur la normale principale, à partir de M, et vers le centre de simple courbure, une longueur $\frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}$. On construit l'axe central en menant, par le centre de double courbure, une parallèle à la droite rectifiante.

IV. Si la ligne est placée sur la surface rectifiante, le centre de double courbure, correspondant à un point M, est le centre de courbure de la section plane, faite, par M, dans la surface, perpendiculairement à la génératrice rectiligne. Ce point est donc le même pour toutes les lignes géodésiques passant par M. La direction de l'axe central étant, d'ailleurs, celle de la génératrice rectiligne, il en résulte que toutes les géodésiques, passant par un même point d'une surface développable, ont même axe central. En d'autres termes, leurs hélices osculatrices, au point considéré, sont tracées sur un même cylindre (*).

(*) Sur l'hélice osculatrice, voir RUCHONNET, ***Exposition géométrique des propriétés générales des courbes***. (Quatrième édition, augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1880; 175 pages in-8°), pp. 154-168. Cet ouvrage serait excellent, s'il était écrit avec la rigueur que l'on exige aujourd'hui dans l'étude des courbes (P. M.).

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices numériques, graphiques et analytiques de Géométrie élémentaire, à l'usage des élèves, par P.-L. VAN DEN BROECK, professeur de mathématiques. Troisième édition. Tournay et Paris, Casterman; Leipzig, Kittler (1884). Un volume in-8° de XI-111 pages, avec 8 planches. Prix : 2 fr. 50.

Ce recueil d'exercices de Géométrie élémentaire est l'un des meilleurs que l'on puisse mettre entre les mains des élèves : les nombreux théorèmes et problèmes qu'il renferme (1150) y sont gradués d'une manière vraiment pratique, et la résolution des problèmes graphiques, par la méthode des lieux géométriques, y est exposée d'une manière simple et appropriée à l'intelligence des élèves de force moyenne, ce qui n'est pas toujours le cas pour l'ouvrage analogue de Petersen.

Un extrait de la Préface suffira pour faire connaître les grandes subdivisions de l'ouvrage : « La première partie, dit l'auteur, est un mélange de problèmes et de théorèmes faciles, disposés dans le même ordre que les théories, dont ils sont des applications immédiates. La deuxième partie renferme, comme exercices graphiques, des théorèmes, des lieux géométriques et des problèmes, précédés respectivement des notions qui s'y rapportent et suivis de leurs démonstrations ou solutions. La troisième partie contient des problèmes déterminés, à résoudre par l'algèbre. Elle peut servir d'introduction à la géométrie analytique, surtout si le professeur a soin d'y ajouter quelques développements relatifs à l'homogénéité, aux quantités négatives concrètes, à la discussion et à la construction des solutions. » (P. M.)

×SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 193.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 231.)

Si dans un triangle deux médianes antiparallèles sont égales, le triangle est isoscèle. (LEMOINE.)

Solution par M. GILLET. Si a, b, c sont les longueurs des côtés, l'hypothèse de la question donne successivement (*Mathesis*, t. I, p. 154) :

$$\frac{a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}(2a^2+2c^2-b^2)=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}(2a^2+2b^2-c^2),$$

$$2(a^2+c^2)(a^2+b^2)(a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2)$$
$$-b^2c^2[(a^2+b^2)^2-(a^2+c^2)^2]=0,$$

$$(c^2-b^2)[2a^2(a^2+c^2)(a^2+b^2)+b^2c^2(2a^2+b^2+c^2)]=0.$$

La quantité entre crochets étant positive, on a nécessairement $c=b$.

Digitized by Google

×Question 230.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 72.)

1° *Sur l'échiquier de n^2 cases, le nombre des sauts du cavalier des échecs est égal au double de* $(2n-3)^2-1$. 2° *Trouver le nombre des sauts du cavalier sur un rectangle de pq cases?* (Éd. Lucas.)

Soit un échiquier de *p colonnes* et de *q lignes*. On peut passer de l'une des $(p-1)$ premières colonnes à la colonne suivante par $(q-2)$ sauts *descendants* et par le même nombre de sauts *remontants*, ce qui fait en tout $4(p-1)(q-2)$ sauts, si l'on fait les mêmes sauts également en arrière (de droite à gauche). De même, il y a $4(q-1)(p-2)$ sauts pour passer d'une ligne à celle qui précède ou qui suit. Donc le nombre total des sauts est le double de

$$2(p-1)(q-2)+2(q-1)(p-2)=(2p-3)(2q-3)-1.$$

M. de Rocquigny a donné, de la même question, une autre solution un peu moins simple que la précédente. (J. N.)

×Question 286.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 232.)

Démontrer les inégalités

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+1}\right]<\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right]-\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n},$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right]-\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+1}\right].$$

(E. Cesàro.)

Solution par M. Minoliti. On a, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots$$

D'où

$$\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2n+1},$$

ce qui démontre la seconde inégalité proposée.

Digitized by Google

On peut aussi écrire

$$\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}<\frac{2}{3(2n+1)}+\frac{1}{3(2n+1)}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right].$$

La progression géométrique

$$1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

a pour somme

$$\frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)}=\frac{2n+1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Donc

$$\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}<\frac{2}{3(2n+1)}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Il est facile de ramener la première inégalité de la question 286 à la précédente.

Question 292.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 232.)

Le centre d'une circonférence se meut sur une parabole, trouver le lieu des points de contact des tangentes à cette circonférence, menées d'un point fixe pris sur l'axe de la parabole. (H. Brocard.)

Solution par M. Pisani. Soient : (α, β) les coordonnées du centre N du cercle mobile, (x, y) celles d'un point M du lieu, $(c, 0)$ celles du point fixe P, enfin r le rayon du cercle. En exprimant que $NM = r$, que l'angle PMN est droit et que N est sur la parabole, on trouve

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,\ y(y-\beta)+(x-\alpha)(x-c)=0,\ \beta^2=2p\alpha.$$

Les deux premières équations donnent :

$$x-\alpha=\frac{ry}{\sqrt{y^2+(x-c)^2}},\quad y-\beta=-\frac{r(x-c)}{\sqrt{y^2+(x-c)^2}}.$$

On en conclut facilement l'équation du lieu (M) :

$$\left[y+\frac{r(x-c)}{\sqrt{y^2+(x-c)^2}}\right]^2=2p\left[x-\frac{ry}{\sqrt{y^2+(x-c)^2}}\right].$$

Transportant l'origine en P et passant ensuite aux coordonnées polaires, on obtient

$$(\rho\sin\omega+r\cos\omega)^2=2p(c+\rho\cos\omega-r\sin\omega).$$

Digitized by Google

Question 326 (*).

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 94.)

A une série de coniques homofocales on tire d'un point fixe P *les tangentes.* 1° *Les circonférences passant par* P *et les deux points de contact passent par un point fixe;* 2° *les coniques décrites par* P, *les deux points de contact et les deux foyers passent par un point fixe.* (W. Tesch.)

Solution par M. V. Jamet. On sait que le lieu des points de contact des tangentes est une courbe du troisième ordre admettant le point P pour point double, passant par les deux foyers, et dont l'équation en coordonnées cartésiennes homogènes est vérifiée quand on y fait $x = \pm y\sqrt{-1}$, $z = 0$. D'ailleurs, les tangentes menées du point P à l'une des coniques de la série sont également inclinées sur deux droites rectangulaires fixes, savoir : la tangente et la normale à l'une des coniques de la série passant par le point P. Nous aurons donc démontré les deux propositions énoncées, si nous établissons le théorème suivant :

« Étant donnée une cubique ayant un point double O, par ce point et par deux points fixes A, B, pris sur la cubique (réels ou imaginaires conjugués) on fait passer une conique telle que ses deux autres points d'intersection avec la cubique soient situés sur deux rayons en involution issus du point O : cette conique passe par un point fixe. »

En effet, prenons le point O pour origine des coordonnées, et soient

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

l'équation qui représente les deux droites OA, OB,

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

l'équation de la droite AB. Cette droite coupe la cubique en un troisième point C. Soit

$$fx + gy = 0$$

l'équation de la droite OC; l'équation de la cubique est alors de la forme

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(fx + gy) = (\alpha x + \beta y + \gamma)(ax^2 + bxy + cy^2),$$

(*) Ce théorème est dû à M. Allersma. C'est par erreur que nous l'avons attribué au savant directeur des *Wiskundige Opgaven*. (J. N.)

Digitized by Google

et toute conique passant par les trois points O, A, B, est représentée par une équation telle que

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)(ux + vy) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \qquad (1)$$

dans laquelle u et v désignent deux paramètres arbitraires.

Multipliant ces deux équations membre à membre, et supprimant le facteur commun

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(\alpha x + \beta y + \gamma),$$

on reconnait que cette conique passe par les deux points d'intersection de la cubique avec les deux droites représentées par l'équation :

$$(ux + vy)(fx + gy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

et les coefficients angulaires de ces droites sont les racines de l'équation suivante :

$$(c - gv)t^2 + (b - fv - gu)t + a - fu = 0.$$

Or, par hypothèse, il existe entre les racines t' et t'' de cette équation une relation de la forme

$$At't'' + B(t' + t'') + C = 0;$$

donc il existe entre u et v la relation suivante

$$A(a - fu) + B(b - fv - gu) + C(c - gv) = 0, \qquad (2)$$

qui est linéaire par rapport à u et v.

Soit

$$u = mv + n,$$

la relation obtenue en résolvant l'équation (2) par rapport à u. L'équation (1) équivaut à

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = v(\alpha x + \beta y + \gamma)(mx + y) + (\alpha x + \beta y + \gamma)nx,$$

et l'on reconnaît qu'elle représente une conique passant par les deux points d'intersection de la droite dont l'équation est

$$mx + y = 0,$$

avec la conique ayant pour équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = nx(\alpha x + \beta y + \gamma).$$

L'un de ces deux points est l'origine des coordonnées, l'autre est un point fixe.

Digitized by Google

Solution par MM. Gob *et* Roersch. Soient M, N les points de contact des tangentes menées par le point P (X, Y) à l'une des coniques. Le cercle PAB peut être représenté par l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 - k(a^2yY + b^2xX - a^2b^2)(a^2yY - b^2xX - l) = 0;$$

car un système de sécantes communes est la polaire MN du point P, et une droite faisant avec OX le même angle que MN, mais en sens contraire. On détermine les paramètres k et l par les conditions que les coefficients de x^2 et y^2 soient égaux, et que l'équation soit vérifiée par X, Y; ce qui donne

$$k = \frac{c^2}{a^4Y^2 + b^4X^2}, \qquad l = \frac{a^2b^2}{c^2}(X^2 + Y^2).$$

L'équation du cercle est donc

$$(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^4Y^2 + b^4X^2) -$$
$$(a^2yY + b^2xX - a^2b^2)(a^2c^2yY - b^2c^2xX - a^2b^2X^2 - a^2b^2Y^2) = 0;$$

en développant et ordonnant, on trouve

$$(a^2Y^2 + b^2X^2)(x^2 + y^2) -$$
$$(X^2 + Y^2 + c^2)b^2Xx - (X^2 + Y^2 - c^2)a^2Yy + c^2(b^2X^2 - a^2Y^2) = 0.$$

Si l'on remplace a^2 par $b^2 + c^2$ et qu'on réunisse les termes en b^2, l'équation prend la forme

$$b^2S + c^2S' = 0,$$

où

$$S = (X^2 + Y^2)(x^2 + y^2) - (X^2 + Y^2 + c^2)Xx -$$
$$(X^2 + Y^2 - c^2)Yy + c^2(X^2 - Y^2),$$
$$S' = Y^2(x^2 + y^2) - (X^2 + Y^2 - c^2)Yy - c^2Y^2.$$

Le cercle PAB passe donc, quelle que soit la conique, par les points d'intersection des cercles qui ont pour équations $S = 0$, $S' = 0$, c'est-à-dire par deux points fixes dont l'un est le point donné P (*).

(*) On vérifie facilement que l'équation $S' = 0$ représente le cercle passant par P et par les foyers réels F, F', et que $S - S' = 0$ est l'équation du cercle passant par P et par les foyers imaginaires f, f' situés sur OY. La puissance de O par rapport au cercle Pff' étant égale à OF^2, les cercles se coupent orthogonalement. On déduit de là que le cercle Pff' a pour diamètre la distance des pieds de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure de l'angle FPF'. La seconde

Digitized by Google

2° La conique PABFF′ a pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 - (a^2yY + b^2xX - a^2b^2)(Ax + By + C) = 0,$$

A, B, C étant déterminés par les conditions que la courbe passe par les points (X, Y), $(c, 0)$, $(-c, 0)$, ce qui donne

$$AX + BY + C = 1,$$

$$b^2 + (cX - a^2)(Ac + C) = 0, \quad b^2 + (cX + a^2)(Ac - C) = 0.$$

On conclut, de ces égalités :

$$A = \frac{b^2X}{a^4 - c^2X^2}, \quad C = \frac{a^2b^2}{a^4 - c^2X^2}, \quad B = \frac{a^2(c^2 - X^2)}{(a^4 - c^2X^2)Y}.$$

Au moyen de ces valeurs, on trouve, pour l'équation de la conique PABFF′,

$$a^2\left(x^2+y^2-\frac{X^2+Y^2-c^2}{Y}y-c^2\right)+X^2\left(y^2-x^2-\frac{Y^2-X^2+c^2}{XY}xy+c^2\right)=0.$$

Quel que soit a, la courbe passe par les points d'intersection des lignes représentées par

$$\frac{x^2 + y^2 - c^2}{X^2+Y^2 - c^2} - \frac{y}{Y} = 0, \qquad \frac{y^2 - x^2 + c^2}{Y^2-X^2 + c^2} - \frac{xy}{XY} = 0. \qquad (3)$$

Ces lignes se coupent en quatre points dont trois coïncident avec P, F, F′; c'est le quatrième point qui est celui de l'énoncé (*).

---

intersection Q des circonférences Pf', PFF′ est le point fixe dont il est parlé ci-dessus.

M. Allersma signale encore les théorèmes suivants : « Le centre du cercle PAB décrit la perpendiculaire au milieu de la droite PQ; le centre de gravité du triangle PAB décrit le diamètre OP; enfin, le point de concours des hauteurs et le centre du cercle des neuf points du triangle PAB parcourent des hyperboles équilatères. (J. N.)

(*) La première de ces lignes est le cercle PFF′. Si l'on élimine $(x^2 - c^2)$ entre les équations (3), on trouve

$$y\left(2y-\frac{Y^2-X^2+c^2}{XY}x-\frac{X^2+Y^2-c^2}{Y}\right)=0.$$

La quantité entre parenthèses, étant égalée à zéro, représente une droite passant par P et par le centre du cercle PFF′. Donc le point fixe des coniques PABFF′ est diamétralement opposé à P sur la circonférence PFF′. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 332.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 95.)

Éliminer x, y, z, u entre les équations

$$x^2 + xy + y^2 = a^2, \qquad z^2 + zu + u^2 = a'^2, \tag{4}$$
$$x^2 + xz + z^2 = b^2, \qquad y^2 + yu + u^2 = b'^2, \tag{5}$$
$$x^2 + xu + u^2 = c^2, \qquad y^2 + yz + z^2 = c'^2. \tag{6}$$

(J. N.)

Solution par M. Gob. Résolvons les équations (1), (2), (6) par rapport à x, y, z. En les additionnant, on trouve

$$2(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = a^2 + b^2 + c'^2. \tag{7}$$

Mais il est facile de voir que x, y, z sont les droites joignant les sommets d'un triangle dont les côtés sont a, b, c', au point d'où l'on voit ces côtés sous l'angle de 120°; par conséquent, si l'on exprime que le triangle total est égal à la somme des triangles partiels qui ont pour côtés (x, y, a), (y, z, c'), (x, z, b), on obtient

$$xy + yz + xz = \frac{4}{\sqrt{3}}\varphi(a, b, c'), \tag{8}$$

$\varphi(a, b, c')$ étant l'aire du triangle dont les côtés sont a, b, c'.

De (7) et (8), on déduit

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c'^2 + 4\varphi(a, b, c')\sqrt{3}}{2}}. \tag{9}$$

En retranchant de la somme des équations (1), (2), le double de (6), on aura

$$2x^2 + xy + xz - (y + z)^2 = a^2 + b^2 - 2c'^2,$$

ou

$$x(x + y + z) + (x + y + z)(x - y - z) = a^2 + b^2 - 2c'^2,$$

ou encore

$$(x + y + z)[3x - (x + y + z)] = a^2 + b^2 - 2c'^2.$$

Si l'on combine ce résultat avec (9), on aura

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c'^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\varphi(a, b, c')}{\sqrt{2[a^2 + b^2 + c'^2 + 4\varphi(a, b, c')\sqrt{3}]}}.$$

Par analogie, on aura les valeurs de y et z.

Digitized by Google

D'un autre côté, on peut éliminer u entre (3), (4) et (5), en combinant celles-ci par soustraction deux à deux, ce qui donne

$$x + z + u = \frac{c^2 - a'^2}{x - z}, \quad y + z + u = \frac{a'^2 - b'^2}{x - y},$$

et en soustrayant les résultats l'un de l'autre ; on obtient ainsi

$$(x - y)(y - z)(z - x) + a'^2(x - y) + b'^2(z - x) + c^2(y - z) = 0. \quad (10)$$

On calcule aisément les différences $x - y$, $y - x$, $z - y$ en soustrayant les équations (1), (2), (6) l'une de l'autre; on obtient

$$(y - z)(z + y + z) = a^2 - b^2, \quad (x - y)(x + y + z) = b^2 - c'^2,$$
$$(z - x)(x + y + z) = c'^2 - a^2.$$

Ces valeurs, avec les relations (9) et (10), conduisent à l'équation de condition

$$2\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c'^2)(c'^2 - a^2)}{a^2 + b^2 + c'^2 + 4\varphi(a, b, c')\sqrt{3}} + a'^2(b^2 - c'^2) + b'^2(c'^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0.$$

On obtient une seconde équation de condition en remplaçant dans la précédente a, b, c', a', b', c respectivement par a', b', c', a, b, c ou par a', b, c, a, b', c' ou enfin par a, b', c, a', b, c'. On aura ainsi quatre égalités dont deux sont une conséquence nécessaire des deux autres.

Note. 1° On peut obtenir, par la géométrie seule, la somme $x + y + z$. En effet, si BCA′, CAB′ sont les triangles équilatéraux construits extérieurement sur BC et CA′, les circonférences circonscrites à ces triangles, et les droites AA′, BB′ se coupent au point Z d'où l'on voit les côtés de ABC sous un angle de 120°. Comme ZA′ = ZB + ZC, AA′ représente $x + y + z$. Mais si M est le milieu de BC, et K la projection de A sur A′M, le triangle AA′M donne

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{A'M}^2 + 2A'M.MK;$$

or

$$\overline{AM}^2 = \frac{2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{4}, \quad A'M = \tfrac{1}{2}BC\sqrt{3}, \quad BC.MK = 2ABC, \text{ etc.}$$

2° En faisant la somme des carrés des équations (1), (2), (6), on obtient

$$2\Sigma x^4 + 3\Sigma x^2 y^2 + 2\Sigma yz(y^2 + z^2) = a^4 + b^4 + c'^4,$$

Digitized by Google

dont le premier membre peut prendre successivement les formes

$$2\Sigma^2x^2 - \Sigma x^2y^2 + 2\Sigma yz\,(y^2 + z^2 + x^2 - x^2),$$
$$2\Sigma^2x^2 - \Sigma x^2y^2 + 2\Sigma x^2\Sigma xy - 2\Sigma x^2yz,$$
$$2\Sigma^2x^2 + 2\Sigma x^2\Sigma xy - \Sigma^2xy;$$

donc
$$2\Sigma^2x^2 + 2\Sigma x^2\Sigma xy - \Sigma^2xy = a^4 + b^4 + c'^4. \qquad (11)$$

D'ailleurs la somme des mêmes équations donne

$$2\Sigma x^2 + \Sigma xy = a^2 + b^2 + c'^2. \qquad (12)$$

Les relations (11) et (12) permettent de déterminer les fonctions Σx^2, Σxy, Σx sans avoir recours à la géométrie. (J. N.)

×Question 342.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 142.)

Démontrer que, pour n croissant indéfiniment,

$$\lim \frac{\left(a + \frac{1}{n}\right)^p + \left(a + \frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(a + \frac{n-1}{n}\right)^p}{n} = \frac{(a+1)^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

(E. Catalan.)

Solution par MM. Van den Broeck, Renson, Remy. Appliquons à la suite

$$a + \frac{1}{n}, \quad a + \frac{2}{n}, \ldots, a + \frac{n-1}{n}$$

la formule relative aux sommes $S_1, S_2, \ldots, S_p$ des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique; nous aurons

$$(a+1)^{p+1} - a^{p+1} = (p+1)\frac{S_p}{n} + \frac{(p+1)^p}{1.2}\frac{S_{p-1}}{n^2} + \cdots + (p+1)\frac{S_1}{n_p} + \frac{n-1}{n^{p+1}}.$$

Si l'on fait croître indéfiniment n, les quantités

$$\frac{S_{p-1}}{n^2}, \quad \frac{S_{p-2}}{n^3}, \quad \ldots, \quad \frac{S_1}{n^p}, \quad \frac{n-1}{n^{p+1}}$$

tendent vers 0; car les termes qui composent S_{p-k} étant moindres que $(a+1)^{p-k}$, on a

$$\frac{S_{p-k}}{n^{k+1}} < \frac{(n-1)(a+1)^{p-k}}{n^{k+1}} < \frac{(a+1)^{p-k}}{n^k}.$$

Digitized by Google

Donc, à la limite,

$$(a+1)^{p+1} - a^{p+1} = (p+1)\frac{S_p}{n}.$$

Solution par FERMAT. On peut remarquer que la limite cherchée est l'aire u de la courbe $y = x^p$ depuis $x = a$, jusque $x = a+1$; car, en divisant la base égale à l'unité, en n parties égales, la somme des rectangles inscrits est égal à l'expression indiquée dans la question, augmentée du terme $(a^p : n)$; pour n indéfiniment croissant, ce dernier terme a pour limite zéro, et la somme des rectangles tend vers l'aire u. FERMAT, avant l'invention du calcul intégral, a trouvé cette aire u, d'une manière simple, en subdivisant la base aux points ayant pour abscisses a, $a\alpha$, $a\alpha^2$, ..., $a\alpha^m = a+1$. La somme des rectangles ayant pour bases $a\alpha - a$, ..., $a\alpha^m - a\alpha^{m-1}$ et pour hauteurs les ordonnées a^p, $(a\alpha)^p$, $(a\alpha^2)^p$, ..., $(a\alpha^{-m1})^p$ est

$$[(a+1)^{p+1} - a^{p+1}] : [1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^p].$$

Si α tend vers l'unité, il vient à la limite, $[(a+1)^{p+1} - a^{p+1}] : (p+1)$. On doit traiter à part le cas beaucoup plus difficile où $p = -1$, qui correspond à l'hyperbole équilatère. (P. M.)

×Question 359.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 175.)

On divise les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *aux points* A_1, B_1, C_1 *dans un même rapport* $m : n$. *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *se coupent, deux à deux, aux points* A_2, B_2, C_2; *de même, les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *se coupent aux points* A_3, B_3, C_3 *et rencontrent* BC, CA, AB *aux points* A_4, B_4, C_4. *Trouver les rapports*

$$\frac{BA_4}{CA_4}, \quad \frac{AA_2}{AA_4}, \quad \frac{AA_3}{AA_4}, \quad \frac{\text{aire } A_3B_3C_3}{\text{aire ABC}},$$

et démontrer que les triangles $A_3B_3C_3$, ABC *ont même centre de gravité.*

(ALPH. LAMBERT.)

Solution par M. MINOLITI. Je prends pour axes de coordonnées AC et AB, et je pose

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c,$$

$$\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{m}{n}.$$

Digitized by Google

Les coordonnées de A_1, B_1, C_1 seront

$$\frac{bn}{m+n},\ \frac{cm}{m+n};\ \frac{bm}{m+n},\ 0;\ 0,\ \frac{cn}{m+n}.$$

On en conclut les équations des droites AA_1, BB_1, CC_1 :

$$y=\frac{cmx}{bn},\quad \frac{(m+n)x}{bm}+\frac{y}{c}=1,\quad \frac{x}{b}+\frac{(m+n)y}{cn}=1,$$

et ensuite les coordonnées de A_2, B_2, C_2, savoir :

$$\frac{bm^2}{h},\ \frac{cn^2}{h};\ \frac{bn^2}{h},\ \frac{cmn}{h};\ \frac{bmn}{h},\ \frac{cm^2}{h};$$

où l'on a posé

$$h=m^2+mn+n^2.$$

Ces dernières valeurs conduisent aux équations des droites AA_2, BB_2, CC_2 :

$$y=\frac{cn^2}{bm^2}x,\quad y=-\frac{c(m^2+n^2)}{bn^2}x+c,\quad y=-\frac{cm^2}{b(m^2+n^2)}(x-b),$$

desquelles on déduit les coordonnées de A_3, B_3, C_3 :

$$\frac{bm^2n^2}{k},\ \frac{cn^4}{k};\ \frac{bn^4}{k},\ \frac{cm^4}{k};\ \frac{bm^4}{k},\ \frac{cm^2n^2}{k},$$

où

$$k=m^4+m^2n^2+n^4,$$

ainsi que les coordonnées de A_4, B_4, C_4 :

$$\frac{bm^2}{m^2+n^2},\ \frac{cn^2}{m^2+n^2};\ \frac{bn^2}{m^2+n^2},\ 0;\ 0,\ \frac{cm^2}{m^2+n^2}.$$

Si l'on mène les ordonnées de A_2, A_3, A_4, les rapports $\frac{BA_4}{CA_4}$, $\frac{AA_2}{AA_4}$, $\frac{AA_3}{AA_4}$ sont égaux à ceux des projections respectives de ces divers segments (projection parallèle à AB); donc, des abscisses de A_2, A_3, A_4, on déduit facilement

$$\frac{BA_4}{CA_4}=\frac{m^2}{n^2},\quad \frac{AA_2}{AA_4}=\frac{m^2+n^2}{m^2+mn+n^2},\quad \frac{AA_3}{AA_4}=\frac{m^2n^2+n^4}{m^4+m^2n^2+n^4},$$

$$\frac{AA_2}{A_2A_4}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m},\quad \frac{AA_3}{A_3A_4}=\frac{n^2}{m^2}+\frac{n^4}{m^4}.$$

Digitized by Google

Pour calculer l'aire $A_3B_3C_3$, observons que

$$\frac{ABA_3}{ABA_4}=\frac{AA_3}{AA_4}=\frac{n^2(m^2+n^2)}{m^4+m^2n^2+n^4},\quad \frac{ABA_4}{ABC}=\frac{BA_4}{BC}=\frac{m^2}{m^2+n^2};$$

d'où, par multiplication

$$\frac{ABA_3}{ABC}=\frac{m^2n^2}{m^4+m^2n^2+n^4},$$

et conséquemment

$$\frac{A_3B_3C_3}{ABC}=1-\frac{3ABA_3}{ABC}=\frac{(m^2-n^2)^2}{k}.$$

Enfin, les sommes des coordonnées de A_3, B_3, C_3 étant b et c, on voit que les triangles ABC, $A_3B_3C_3$ ont même centre de gravité.

M. Gob a donné une bonne solution de la même question par les transversales.

QUESTIONS PROPOSÉES.

413. Le lieu d'un point tel que les extrémités des trois droites limitées aux côtés des angles d'un triangle donné et ayant leur milieu en ce point soient situées sur une hyperbole équilatère est l'axe d'homologie de ce triangle et du triangle des pieds de ses hauteurs. (STEINER.)

414. On donne deux circonférences O et O_1 qui se coupent en A et B. Démontrer qu'il n'existe qu'une seule conique osculatrice en A au cercle O_1 et osculatrice aussi au cercle O. Déterminer le point d'osculation au cercle O. (E. DEWULF, colonel du génie)(*).

415. On donne deux coniques S, S′ et un point A sur S. Démontrer qu'il n'existe que quatre coniques osculatrices à S en A et osculatrices aussi à S′. Déterminer les quatre points d'osculation de S′.

(E. DEWULF.)

416. Soient O, O_1 deux circonférences qui se coupent en un point A. Trouver le lieu des centres, des foyers, des sommets et l'enveloppe des axes des coniques osculatrices au cercle O en A et tangentes au cercle O_1. (E. DEWULF.)

417. On donne une circonférence C, un point O sur cette ligne et deux directions fixes. Par un point quelconque M de C, on trace les cordes MA, MB parallèles aux directions fixes; trouver le lieu du point P où se coupent les droites MO, AB. Déterminer la tangente en ce

(*) L'arme du Génie compte d'éminents mathématiciens, témoin Dandelin, Poncelet, Carnot, Meusnier, Peaucellier, Parmentier, P. H. Laurent, etc.

Digitized by Google

point, les asymptotes, et démontrer que les asymptotes forment un triangle équilatéral. — Les parallèles aux asymptotes menées par O rencontrent la circonférence en trois points R_1, R_2, R_3. Démontrer que les trois hyperboles qui ont leurs asymptotes parallèles aux deux directions fixes données et qui sont osculatrices à la circonférence en R_1, R_2, R_3 se coupent en O. (E. Dewulf.)

418. Soient a_1, a_2, ..., a_i,... des droites passant par un point fixe A, et supposons ce faisceau de droites lié à un plan qui se déplace sur lui-même. Soient O le centre instantané de rotation, (C) le cercle des centres. A la droite a_i correspond une conique (a_i), lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de a_i. Soit M′ le point d'intersection de (a_i) avec une droite passant par le centre instantané O et faisant avec a_i un angle constant φ. Démontrer que le lieu géométrique du point M est une strophoïde qui a son point double en O, et dont les cercles osculateurs en O sont : 1° la circonférence des centres (C); 2° le segment capable de l'angle φ décrit sur OA. (E. Dewulf.)

419. On considère trois paraboles, ayant pour foyer commun le centre du cercle inscrit au triangle des sommets : 1° La tangente commune à deux paraboles est perpendiculaire à l'axe de la troisième, et contient le centre d'un cercle ex-inscrit au triangle des sommets. 2° Les points de contact d'une parabole, avec deux tangentes communes, sont en ligne droite avec le point où la troisième tangente rencontre l'axe. 3° Tout triangle inscrit au triangle des tangentes communes, et semblable à ce triangle, a chacun de ses côtés tangent à une parabole. (E. Cesàro.)

***420.** Construire un triangle ABC connaissant : 1° l'angle A et les longueurs des droites menées par A et divisant la base en parties proportionnelles à m, n, p; 2° la base BC et les points où cette base est rencontrée par les droites qui divisent l'angle opposé en trois parties égales; 3° le côté BC et les longueurs des droites BB′, CC′ qui divisent AC, AB dans les rapports donnés $m : n$, $p : q$.

QUESTIONS D'EXAMEN.

177. Si dans un triangle rectiligne (ou sphérique), un angle est fixe et la somme des côtés qui le comprennent constante, le milieu du troisième côté décrit une droite (ou un grand cercle).

178. Si dans un triangle rectiligne ou sphérique, un angle est égal

Digitized by Google

à la somme des deux autres, la médiane qui passe par le milieu du côté opposé à cet angle, est égale à la moitié de ce côté. — Réciproque.

179. Trouver le lieu du point qui divise dans un rapport donné $m : n$ la tangente à une parabole, limitée au point de contact et à l'axe de la courbe ou à la directrice. — Même question pour la normale.

180. Soient $2a'$, $2b'$ les longueurs de deux diamètres d'une ellipse perpendiculaires à deux diamètres conjugués ; démontrer que le quotient

$$\frac{a'^2b'^2 - a^2b^2}{a'^2 + b'^2 - (a^2 + b^2)}$$

est constant. (J. N.)

181. La portion d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les tangentes aux sommets du grand axe, est vue de chaque foyer sous un angle droit. (Par la géométrie.)

182. Mener à un cercle donné une tangente telle que la partie comprise entre un diamètre donné et une droite donnée, perpendiculaire à ce diamètre soit divisée par le point de contact dans le rapport $m : n$.

183. Par un point A donné sur la circonférence O, on mène une sécante quelconque qui rencontre cette ligne en B et coupe en C une perpendicuaire au diamètre AO. Soient D le milieu de BC, E le symétrique de B par rapport à C, F le symétrique de C par rapport à B. Trouver les équations, en coordonnées polaires, des lieux des points D, E, F. Déterminer géométriquement les asymptotes.

184. Inscrire, dans un triangle donné, le rectangle qui, en tournant autour du côté commun, engendre le volume maximum.

185. Partager une droite donnée AB en deux parties telles que, si l'on fait tourner autour de AB le triangle équilatéral construit sur l'une des parties et le carré construit sur l'autre partie, la somme des surfaces engendrées soit un minimum.

RECTIFICATIONS.

Volume d'un prismatoïde, lisez, page 9, ligne 2, *plans* et non *planes*. Page 10, en note, ligne 2, *Giard* et non *Girard*. A la page 12, dans l'énoncé des questions, il faut 118, à la place de 108, et à la page 15, ligne 6 en remontant, *entre* au lieu de *ente*. Page 22, question 407, lire 2A'K. B'K. C'K, au lieu de A'K. B'K. C'K.

La solution de la question 91 donnée p. 14, n'est pas générale et n'est exacte que pour $R'_{7+1} = n$. Elle sera complétée dans le prochain numéro.

Digitized by Google

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

Définition d'un nombre incommensurable (*).

1. *Distinction des nombres commensurables en deux groupes séparés ou non par un nombre commensurable.* Un nombre commensurable quelconque, entier ou fractionnaire, le nombre 2, par exemple, sépare tous les nombres commensurables en deux groupes, l'un comprenant ceux qui sont plus petits, l'autre tous ceux qui sont plus grands que 2.

On peut aussi subdiviser l'ensemble des nombres commensurables en deux groupes tels que les nombres du premier soient supérieurs à ceux du second, sans qu'aucun nombre commensurable sépare ces deux groupes. Ainsi, aucun nombre entier ou fractionnaire ne sépare les nombres commensurables dont les carrés sont inférieurs à 2, de ceux dont les carrés sont supérieurs à 2. En effet, aucune fraction $\frac{p}{q}$ n'est telle que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, et, par suite, quelles que soient les valeurs entières que l'on donne à p et q, on a toujours

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 > 2.$$

Il est clair que, dans les deux cas, tout nombre commensurable inférieur à un nombre du premier groupe appartient au premier groupe; tout nombre commensurable supérieur à un nombre du second groupe, appartient aussi au second groupe.

2. Théorème. *Entre deux nombres a et* A *appartenant, le premier, au premier groupe, le second, au second groupe, on peut assigner une suite indéfinie*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

de nombres du premier groupe de plus en plus grands, et une suite indéfinie

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n$$

(*) D'après Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1872.

Digitized by Google

de nombres du second groupe, de plus en plus petits, et tels que la différence $A_n - a_m$ *tende vers zéro.*

I. Supposons d'abord les deux groupes séparés par un nombre commensurable α. Posons $\alpha - a = \delta$, $A - \alpha = \Delta$. Les deux suites

$$a_1 = \alpha - \tfrac{1}{2}\delta, \quad a_2 = \alpha - \tfrac{1}{4}\delta, \quad a_3 = \alpha - \tfrac{1}{8}\delta, \quad \text{etc.},$$
$$A_1 = \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta, \quad A_2 = \alpha + \tfrac{1}{4}\Delta, \quad A_3 = \alpha + \tfrac{1}{8}\Delta, \quad \text{etc.},$$

vérifient immédiatement l'exactitude du théorème.

II. Supposons ensuite qu'aucun nombre commensurable ne sépare les deux groupes. Le nombre $\frac{1}{2}(a + A)$ appartiendra à l'un des deux groupes, au premier, par exemple. Soit $a_1 = \frac{1}{2}(a + A)$. Le nombre $\frac{1}{2}(a_1 + A)$ appartiendra encore à l'un des groupes, au second, par exemple; désignons-le par A_1. Formons ensuite le nombre $\frac{1}{2}(a_1 + A_1)$, et ainsi de suite, indéfiniment, en prenant toujours la demi-somme des derniers nombres obtenus dans chaque groupe. La suite

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \text{etc.}$$

sera formée de nombres croissants, la suite

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \text{etc.}$$

de nombres décroissants. Après k opérations, la différence entre le dernier nombre formé dans le second groupe et le dernier nombre formé dans le premier sera

$$\frac{A - a}{2^k}.$$

Par conséquent, pour k croissant indéfiniment, la différence des derniers nombres pris l'un, dans le second groupe, l'autre dans le premier, tend indéfiniment vers zéro.

L'une au moins des deux suites

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \text{etc.},$$
$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \text{etc.},$$

est indéfinie, puisque le procédé employé pour former ces suites donne indéfiniment de nouveaux nombres. Supposons, par exemple, que la première suite soit indéfinie; je dis que l'autre sera indéfinie aussi. En effet, soit, s'il est possible, dans cette suite, A′ le dernier nombre que donne le procédé de formation; appelons a_p le dernier nombre de la première suite obtenu avant A′. En appliquant le procédé de formation

Digitized by Google

aux nombres A′ et a_p, dont nous appellerons la différence δ', nous n'obtiendrons plus que des nombres du premier groupe, savoir :

$$a_{p+1} = A' - \frac{\delta}{2}, \quad a_{p+2} = A' - \frac{\delta}{4}, \quad \ldots, \quad a_{p+q} = A' - \frac{\delta}{2^q}.$$

Puisque q est aussi grand qu'on le veut, $(\delta : 2^q)$ est aussi petit qu'on le veut et, par suite, a_{p+q} est aussi peu différent de A′ qu'on le veut, pour q suffisamment grand. Il en résulte que tout nombre commensurable b, inférieur à A′, appartient au premier groupe, car on peut prendre q assez grand pour que l'on ait

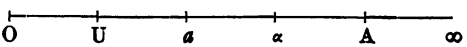
$$b < a_{p+q} < A'.$$

Si donc la suite A, A_1, A_2, ... A′, était finie, A′ séparerait tous les nombres du premier groupe de tous ceux du second, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, on doit admettre que la suite

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \text{etc.}$$

est indéfinie, et le théorème est complètement démontré.

3. ***Représentation géométrique.*** Supposons que l'on puisse avoir une idée exacte de la longueur d'une droite sans recourir aux notions précédentes(*).



En prenant sur une droite indéfinie Oα∞ , un point α au hasard, deux cas peuvent se présenter 1° Oα peut être commensurable avec l'unité de longueur OU, ou non. Dans le premier cas, le rapport commensurable (Oα : OU) sépare tous les nombres commensurables, plus petits que ce rapport, de tous les nombres plus grands. A ces nombres plus petits correspondent des points a, compris entre O et α, tels que (Oa : OU) soit un rapport commensurable; aux nombres plus grands correspondent des points A situés au-delà de α, et tels que (OA : OU) soit aussi commensurable. 2° Oα peut ne pas être commensurable avec l'unité OU. Dans ce cas, tous les points a, A dont les distances à O sont dans un rapport

(*) Au point de vue mathématique, il est inutile d'entrer dans cette question ardue de métaphysique. Nous n'introduisons ici une représentation géométrique que subsidiairement; elle ne nous est pas indispensable. Elle est indispensable, au contraire, si l'on définit, comme le fait, au fond, Cauchy, dans la Note 1 de son ***Analyse Algébrique***, le nombre incommensurable comme étant la limite d'une suite de nombres commensurables.

Digitized by Google

commensurable à OU sont séparés en deux groupes par le point α. Tous les rapports (OA : OU) sont supérieurs aux rapports ($O\alpha$: OU).

Dans les deux cas, par les constructions géométriques correspondant aux procédés décrits au n° précédent, on obtient deux suites indéfinies de points

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots.$$
$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots.$$

dont les derniers obtenus, de plus en plus rapprochés, enserrent le point α dans un segment de droite de plus en plus petit.

4. *Nombre incommensurable.* Lorsque, par un procédé quelconque, on parvient à distinguer tous les nombres commensurables en deux groupes, l'un de nombres a, a_1, a_2, etc., plus petits, l'autre de nombres A, A_1, A_2, etc., plus grands, sans qu'aucun nombre commensurable sépare ces deux groupes, on dit qu'ils sont séparés par un *nombre incommensurable*. Ce nombre incommensurable est défini par le procédé même qui sert à former les deux groupes.

Ainsi, par exemple, on peut distinguer tous les nombres commensurables en deux groupes, l'un comprenant ceux dont le carré est inférieur à 2, l'autre ceux dont le carré est supérieur à 2. Ces deux groupes ne sont séparés par aucun nombre commensurable, mais on dit, *par convention*, qu'ils sont séparés par un nombre incommensurable, représenté par le symbole $\sqrt{2}$.

D'après ce qui précède, les expressions suivantes sont donc équivalentes : 1° Les deux groupes (a, a_1, a_2, etc.), (A, A_1, A_2, etc.), ne sont séparés par aucun nombre commensurable; 2° Les deux groupes sont séparés par un nombre incommensurable α.

Géométriquement, α étant sur la droite $O\alpha\infty$ un point dont la distance à O n'est pas dans un rapport commensurable à OU, on dit que $O\alpha$ a, avec OU, un rapport qui est un nombre incommensurable. Ce nombre incommensurable est représenté par ($O\alpha$: OU).

5. *Dénominations relatives aux nombres incommensurables.* Si α sépare les deux groupes

$$(a, \ a_1, \ a_2, \ a_3, \text{ etc.}), \quad (A, \ A_1, \ A_2, \ A_3, \text{ etc.})$$

on dit que α est plus grand que a_m, plus petit que A_n, ou que l'on a

$$\alpha - a_m < A_n - a_m, \quad A_n - \alpha < A_n - a_m,$$

a_m étant un nombre quelconque du premier groupe, A_n un nombre

Digitized by Google

quelconque du second. On dit encore que α est égal à a_m plus une partie de $A_n - a_m$, ou a A_n moins une partie de $A_n - a_m$, ce que l'on écrit

$$\alpha = a_m + \theta (A_n - a_m), \quad \alpha = A_n + \theta' (a_m - A_n)$$

θ et θ' signifiant *une partie de*.

Si $A_n - a_m$ a pour limite zéro quand m et n croissent indéfiniment, comme dans le théorème du n° 2, on dit que $\alpha - a_m$, $A_n - \alpha$ ont aussi pour limite zéro ou que $\lim a_m = \lim A_n = \alpha$.

Si β est un nombre incommensurable différent de α, on dit que β est plus grand que α, lorsqu'il existe un nombre commensurable plus grand que α et plus petit que β. Dans ce cas, d'après le n° 2, il existe une infinité de nombres commensurables compris entre α et β.

En général, on étend par *convention*, aux nombres incommensurables, les propositions obtenues, *par démonstration*, pour les nombres commensurables, chaque fois que la définition purement négative des nombres incommensurables ne suffit pas pour établir ces propositions(*). Par exemple, si l'on a

$$\lim a_m = \lim A_n = \alpha, \quad \lim b_p = \lim B_q = \beta$$

la différence $\beta - \alpha$ est, par définition, la limite de $b_p - a_m$, de $b_p - A_n$, de $B_q - a_m$, ou de $B_q - A_n$. On peut écrire aussi

$$\beta - \alpha = b_p - A_n + \theta (A_n - a_m) + \theta' (B_q - b_p).$$

Nous reviendrons ultérieurement sur la définition des opérations relatives aux nombres incommensurables. (P. M.)

(*) C'est M. Catalan, croyons-nous, qui a songé, le premier, à introduire l'idée de limite dans la définition même des *opérations* analytiques. (*Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre*, 1852, p. 88 de la huitième édition, et *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, 1857; tome premier, p. 18-22). « Cette manière d'envisager les incommensurables, repoussée d'abord, a été adoptée depuis (Catalan, *Arithmétique*, p. 88). » Au fond, elle ne diffère guère de celle qui est exposée dans le *Lehrbuch der Analysis* de Lipschitz (Bonn, Cohen, 1877-1880). Néanmoins, une démonstration de l'équivalence des deux manières de voir est nécessaire. Depuis la brochure de M. Dedekind en 1872, il a paru, en Allemagne et en Italie, divers écrits défendant les mêmes idées. Voir aussi dans le *Journal de Bourget*, 1884, p. 212-216, 229-233, 256-263, 277-283, divers articles de M. Calinon, puis en 1885, p. 18, une note de M. Catalan.

Digitized by Google

QUESTION DE LICENCE;

par M. H. Brocard, capitaine du Génie à Montpellier.

(Suite, voir *Mathesis*, t. IV, p. 124.)

XI. *En un point quelconque* M *de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

on mène la tangente, que l'on prolonge jusqu'à son point de rencontre T *avec l'axe* Ox, *puis l'on fait tourner la figure autour de cet axe.* A *étant le sommet de la courbe, exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette* AM *et par la tangente* MT : 1° *En fonction de l'abscisse* x *du point* M; 2° *En fonction de l'abcisse* X *du point* T (Paris, juillet 1880).

La tangente au point M (x, y) a pour équation

$$Y - y = y'(X - x);$$

donc

$$OT = X = x - \frac{y}{y'}, \quad \frac{dX}{dx} = \frac{yy''}{y'^2}.$$

D'ailleurs, les propriétés de la chaînette donnent, si T est la longueur MT (Voir *Mathesis*, t. I, 28, 71; t. II, 49, 217, 219; t. III, 81),

$$Ts = y^2, \quad (T - s)s = a^2, \quad y^2 - s^2 = a^2, \quad yy' = ss', \quad y' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}, \quad y'' = \frac{y}{a^2}.$$

Les aires décrites par l'arc $AM = s$ et par la tangente MT ont, respectivement, pour expressions

$$2\pi \int y\,ds = 2\pi \int \frac{y^2}{y} y', \quad 2\pi y \frac{T}{2} = \pi \frac{y^3}{s}.$$

La différence a donc pour valeur

$$u = 2\pi \int \frac{y^2 y'}{s} - \pi \frac{y^3}{s}, \quad \text{d'où} \quad u' = \frac{\pi a^2 y^2 y'}{(y^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, en tenant compte des relations précédentes,

$$u' = \pi a \frac{yy''}{y'^2} \quad \text{ou} \quad du = \pi a d\left(x - \frac{y}{y'}\right) = \pi a d\mathrm{X}.$$

Digitized by Google

Par conséquent,

$$u = \pi a \left[x - \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} \right] = \pi a \mathrm{X}.$$

NOTE. On trouve, en employant les fonctions hyperboliques,

$$y' = \mathrm{Sh}\frac{x}{a}, \quad \mathrm{X} = x - a\,\mathrm{Coth}\frac{x}{a}, \quad \mathrm{S} = a\,\mathrm{Sh}\frac{x}{a}, \quad \mathrm{T} = \frac{y\,ds}{dy} = a\,\frac{\mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}}{\mathrm{Sh}\frac{x}{a}},$$

$$\text{aire TM} = \pi y \mathrm{T} = \pi a^2 \frac{\mathrm{Ch}^3\frac{x}{a}}{\mathrm{Sh}\frac{x}{a}},$$

$$\text{aire AM} = 2\pi^2 \int_0^x \mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \pi a \int_0^x \left(\mathrm{Ch}\frac{2x}{a} + 1\right) dx =$$

$$\pi a \left(\frac{a}{2}\mathrm{Sh}\frac{2x}{a} - x\right) = \pi a \left(a\,\mathrm{Sh}\frac{x}{2}\,\mathrm{Ch}\frac{2}{a} - x\right),$$

$$\text{aire TM} - \text{aire AM} = a\left(x - a\,\mathrm{Cth}\frac{x}{2}\right) = \pi a \mathrm{X}. \qquad \text{(P. M.)}$$

(*A continuer*).

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

par M. E CESÀRO, élève-ingénieur, étudiant à Rome.

1. On a :

$$e^x \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots + e^{nx};$$

ou bien, en développant e^{nx}, e^x, e^{2x},... en série et désignant par s_p la somme des puissances $p^{ièmes}$ des n premiers nombres entiers :

$$\frac{xe^x}{e^x - 1}\left(n + n^2\frac{x}{1.2} + n^3\frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right) = s_0 + s_1\frac{x}{1} + s_2\frac{x^2}{1.2} + \cdots \quad (1)$$

Si l'on compare entre eux les coefficients de n, on trouve la formule connue

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1\frac{x}{1} + \mathrm{B}_2\frac{x^2}{1.2} + \mathrm{B}_3\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots, \quad (2)$$

Digitized by Google

dans laquelle B_p est le $p^{ième}$ nombre de Bernoulli, c'est-à-dire le coefficient de n dans s_p.

2. Soit $A_{i,p}$ le cofficient de n^i dans s_p. En égalant, dans (1), les coefficients de n^i, on obtient :

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = iA_{i,i-1} + A_{i,i}x + A_{i,i+1}\cdot\frac{x^2}{i+1} + A_{i,i+2}\cdot\frac{x^3}{(i+1)(i+2)} + \cdots \quad (3)$$

3. La comparaison des formules (2) et (3) donne

$$A_{i,p} = C_{p+1,p-i+1}\cdot\frac{B_{p-i+1}}{p+1}.$$

Il en résulte la formule symbolique connue

$$s_p = \frac{(n+B)^{p+1} - B^{p+1}}{p+1}.$$

NOTE. Comparer *Mathesis*, III, p. 13, N. C. M. II, 331, VI, 450.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 91.

(Voir *Mathesis*, t. I, p. 206; t. V, p. 14 et 48.)

Étant donnée une fraction irréductible $\frac{A}{B}$, ***de dénominateur inférieur ou égal à n, trouver la fraction irréductible, immédiatement supérieure aussi de dénominateur inférieur ou égal à n.*** (STOUVENEL.)

Solution par M. VAN DEN BROECK. Soit $\frac{x}{y}$ une fraction irréductible supérieure à $\frac{A}{B}$. Posons

$$\frac{x}{y} - \frac{A}{B} = \frac{v}{By}, \quad \text{ou} \quad Bx - Ay = v.$$

Résolvons cette équation indéterminée en convertissant $\frac{A}{B}$ en fraction continue. Soit $\frac{P}{Q}$ l'avant-dernière réduite; la solution est donnée par les formules

$$x = \pm Pv + At, \quad y = \pm Qv + Bt,$$

les signes + ou — se rapportant respectivement aux cas où le nombre des quotients incomplets est impair ou pair.

Digitized by Google

Dans le premier cas, pour que la différence

$$\frac{x}{y}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B\left(Q+B\frac{t}{v}\right)}$$

soit minimum, il faut prendre pour v sa plus petite valeur, qui est 1, et pour t sa plus grande valeur, qui résulte de la condition $Q+Bt\leqq n$; x et y seront, en même temps, premiers entre eux. Comme $Q<B<n$, le problème admet toujours une solution, qui peut être $\frac{P}{Q}$.

Dans le second cas, on pose encore $Bt-Q\leqq n$. Cette inégalité peut donner $t=1$; alors la solution cherchée est $\frac{A-P}{B-Q}$.

Autre solution(*). Convertissons la fraction donnée en fraction continue et soit

$$\frac{A}{B}=(a, b, \ldots, p, q).$$

Considérons la suite

$$\frac{R_0}{R'_0}=\frac{P}{P'},\quad \frac{R_1}{R'_1},\quad \frac{R_2}{R'_2},\quad \ldots,\quad \frac{R_\infty}{R'_\infty}=\frac{A}{B}. \tag{1}$$

Si le nombre des quotients $a, b, \ldots p, q$ est impair, la suite (1) est décroissante (Principe I, p. 13). Les dénominateurs $R'_0, R'_1, R'_2, \ldots$ formant une suite croissante, le nombre n tombe nécessairement entre deux dénominateurs consécutifs R_k, R'_{k+1} (**). Je dis que la fraction cherchée est $\frac{R_k}{R'_k}$. En effet, d'abord, elle est irréductible et supérieure à $\frac{A}{B}$; ensuite, toute fraction qui approche plus de $\frac{A}{B}$ que $\frac{R_k}{R'_k}$ doit tomber entre deux fractions consécutives $\frac{R_l}{R'_l}$, $\frac{R_{l+1}}{R'_{l+1}}$ de la suite (1), l étant au moins égal à k, ce qui exige qu'elle ait un dénominateur plus grand que R'_{l+1} et à fortiori plus grand que n (Principe III, p. 14).

(*) Rectification de celle qui a paru dans le numéro de janvier, p. 14-15.

(**) La conclusion subsiste encore lorsque $n=R_k$, ce qui peut arriver.

Digitized by Google

Supposons le nombre des quotients $a, b, \ldots, p, q$ pair. Ce cas se ramène au précédent, si l'on remplace le dernier quotient q par $(q-1)+\frac{1}{1}$ (*). (J. N.)

×Question 99.

(Voir *Mathesis*, t. I, p. 207).

Soient AA′, BB′, CC′ *les hauteurs du triangle* ABC, H *leur point d'intersection;* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés du triangle,* A_2, B_2, C_2 *les milieux des segments* AH, BH, CH. *Démontrer* : 1° *Que les droites de Simson des sommets de l'un des deux triangles* A′B′C′, $A_1B_1C_1$ *par rapport à l'autre triangle concourent au centre de gravité du périmètre du triangle* A′B′C′ (**); 2° *que le triangle formé par les droites de Simson des points* A_2, B_2, C_2 *par rapport au triangle* A′B′C′ *a pour centre d'homologie avec* ABC *le centre de gravité de* A′B′C′ *et pour point de concours des hauteurs le centre de gravité du périmètre de* A′B′C′. (E. Van Aubel.)

Solution par M. Liénard. 1° La droite de Simson du point B_1 par rapport au triangle A′B′C′ passe par le milieu de A′C′ (***) et est parallèle à BB′ puisque B′B_1 est bissectrice extérieure de l'angle C′B′A′. Cette remarque nous conduit à la propriété énoncée, car l'on obtient le centre de gravité du périmètre de A′B′C′ en menant respectivement par les milieux P, Q, R des côtés A′B′, A′C′, B′C′ des parallèles à CC′, BB′, AA′.

La droite de Simson du point B′ par rapport à $A_1B_1C_1$ est la parallèle menée par le milieu K de la hauteur BB′ à la droite BO passant par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; c'est ce qui résulte d'un théorème connu : La droite de Simson d'un point est équidistante de ce point et du point de rencontre des hauteurs du triangle (****).

Soit T son point de rencontre avec RT parallèle à AA′. Les trian-

---

(*) Les trois dernières réduites sont maintenant $\frac{P}{P'}$, $\frac{A-P}{B-P'}$, $\frac{A}{B}$, et les fractions de la suite (1) ont la forme $\frac{Ak-P}{Bk-P'}$.

(**) Le centre de gravité du périmètre d'un triangle t coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle qui a ses sommets aux milieux des côtés de t.

(***) La droite A_2B_1 est perpendiculaire au milieu de A′C′. Les projections de B_1 sur B′A′ et B′C′ sont situées sur une perpendiculaire à AC.

(****) Voir N. A. M. (2), IV, 1865, 177-178, VIII, 1869, 530-532.

Digitized by Google

gles KTR, C'B'H; BC'B', A'HB', respectivement semblables comme équiangles, donnent

$$\frac{C'B'}{B'H} = \frac{RK}{RT} = \frac{C'B}{2RT}, \qquad \frac{C'B'}{B'H} = \frac{C'B}{HA'}.$$

Ces égalités montrent que $2RT = HA'$; T est donc le centre de gravité du périmètre de A'B'C'.

2° Les droites de Simson des points C_2, B_2, A_2 relatives au triangle A'B'C' sont les parallèles menées par P, Q, R respectivement aux côtés AB, AC, BC du triangle ABC; soit S le point de rencontre des deux premières.

La droite A'R coupe PQ en V, la droite SV est parallèle à AR et $SV = \frac{1}{2}$ AR; donc si SA coupe RV en G, $VG = \frac{1}{2}$ GR; etc....

Enfin, on établit la dernière partie de la question en remarquant que la droite ST est parallèle à AA'.

NOTE. Comparez N. C. M., IV, 142-145, *Mathesis*, I, 163-165.

×Question 189.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 208.)

Le nombre total des solutions entières non négatives des équations

$$x + 4y = 3n - 1, \quad 4x + 9y = 5n - 4, \quad 9x + 16y = 7n - 9, \ldots$$

est égal à n. (E. CESÀRO.)

Solution par MM. GILLET et VAN DEN BROECK. La p^e équation est

$$p^2x + (p+1)^2y = [(p+1)^2 - p^2]n - p^2; \qquad (1)$$

d'où la solution évidente : $x = -(n+1)$, $y = n$, et ensuite la solution générale :

$$x = -(n+1) + (p+1)^2t, \quad y = n - p^2t.$$

Les solutions non négatives de (1) correspondent aux valeurs de t telles que

$$\frac{n+1}{(p+1)^2} \leqq t \leqq \frac{n}{p^2}. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Désignons par N_p le nombre des solutions admissibles de (1) et par $[x]$ le nombre entier immédiatement inférieur à x, ou $= x$ si x est entier. Nous distinguerons deux cas :

1° Si $(p+1)^2$ ne divise pas $n+1$, les relations (2) donnent les valeurs de t :

$$\left[\frac{n+1}{(p+1)^2}\right]+1, \quad \left[\frac{n+1}{(p+1)^2}\right]+2, \quad \dots \quad \left[\frac{n}{p^2}\right],$$

et alors

$$N_p = \left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n+1}{(p+1)^2}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n}{(p+1)^2}\right].$$

2° Si $(p+1)^2$ divise $n+1$, on peut prendre pour t les valeurs

$$\frac{n+1}{(p+1)^2}, \quad \frac{n+1}{(p+1)^2}+1, \quad \dots \quad \left[\frac{n}{p^2}\right],$$

et l'on aura, comme dans le premier cas,

$$N_p = \left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n+1}{(p+1)^2}-1\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n}{(p+1)^2}\right].$$

Faisant successivement $p = 1, 2, \dots n$, on trouve

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = \left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{(n+1)^2}\right] = \quad ,$$

NOTE. Comparez *Mathesis*, III, 87-91.

×Question 225.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 48.)

Trois droites menées par les sommets d'un triangle ABC *et par un même point* O *rencontrent les côtés aux points* A′, B′, C′. *On les prolonge, dans les deux sens, des quantités* $A'\alpha = A\alpha' = AA'$, $B'\beta = B\beta' = BB'$, $C'\gamma = C\gamma' = CC'$. Démontrer que

$$\alpha\beta\gamma = 4A'B'C' + 3ABC, \quad \alpha'\beta'\gamma' = A'B'C' + 6ABC. \quad \text{(J. NEUBERG.)}$$

Solution par M. BASTIN. Soient h, k, l les hauteurs du *triangle de référence* ABC. L'aire T d'un triangle quelconque, en fonction des

Digitized by Google

coordonnées triangulaires de ses sommets, est donnée par la formule

$$\frac{T}{ABC} = \frac{1}{hkl}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées des sommets des triangles A'B'C', $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ se déterminent facilement, au moyen de triangles semblables, en fonction des coordonnées x, y, z du point O. On trouve

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{1}{hkl}\begin{vmatrix} 0 & \frac{hy}{h-x} & \frac{hz}{h-x} \\ \frac{kx}{k-y} & 0 & \frac{kz}{k-y} \\ \frac{lx}{l-z} & \frac{lz}{l-y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{(h-x)(k-y)(l-z)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

en tenant compte de la relation

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{r}{l} = 1, \qquad (1)$$

on aura

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{2xyz}{hyz + kzx + lxy - xyz}.$$

De même,

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} =$$

$$\frac{1}{hkl}\begin{vmatrix} -h & \frac{2hy}{h-x} & \frac{2hz}{h-x} \\ \frac{2kx}{k-y} & -k & \frac{2kz}{k-y} \\ \frac{2lz}{l-z} & \frac{2ly}{l-y} & -l \end{vmatrix} = \frac{1}{(h-x)(k-y)(l-z)}\begin{vmatrix} x-h & 2y & 2z \\ 2x & y-k & 2z \\ 2x & 2y & z-l \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant, étant développé et réduit au moyen de (1), donne

$$(x-h)(y-k)(x-l) - 4\Sigma hyz(x-h) + 16xyz = 5xyz + 3\Sigma hyz.$$

Donc

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} = \frac{5xyz + 3\Sigma hyz}{\Sigma hyz - xyz} = 3 + \frac{8xyz}{\Sigma hyz - xyz} = 3 + \frac{4A'B'C'}{ABC}.$$

Digitized by Google

Par des calculs semblables,

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{ABC} = \frac{1}{hkl}\begin{vmatrix} 2h & \frac{-hy}{h-x} & \frac{-hz}{h-x} \\ -\frac{kx}{k-y} & 2k & -\frac{kz}{k-y} \\ -\frac{lx}{l-x} & -\frac{ly}{l-z} & 2l \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8(h-x)(k-y)(l-z) - 2\Sigma yz(h-x) - 2xyz}{\Sigma hyz - xyz} = \frac{6\Sigma hyz - 4xyz}{\Sigma hyz - xyz}$$

$$= 6 + \frac{2xyz}{\Sigma hyz - xyz} = 6 + \frac{A'B'C'}{ABC} \text{ (*)}.$$

Note. Des solutions géométriques nous ont été adressées par MM. Lienard, Gob et Pisani. Voici comment on peut les simplifier en se servant des notations trigonométriques. On a

$$\alpha O\beta = \tfrac{1}{2}\sin\alpha O\beta\,(2OA' + AO)(2OB' + BO)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin\alpha O\beta\,(4OA'.OB' + 2OA'.BO + 2OB'.AO + AO.BO)$$
$$= 4OA'B' + 2OA'B + 2OAB' + AOB;$$
$$\beta O\gamma = 4OB'C' + 2OB'C + 2OBC' + BOC;$$
$$\gamma O\alpha = 4OC'A' + 2OC'A + 2OCA' + COA.$$

Ajoutons, etc. Pour l'aire $\alpha'\beta'\gamma'$, on écrira

$$\alpha' O\beta' = \tfrac{1}{2}\sin\alpha' O\beta'\,(2AO + OA')(2BO + OB') \text{ etc.}$$

M. Radicke, professeur à Bromberg, généralise la question 225 en supposant

$$\frac{A\alpha}{A'\alpha} = \frac{B\beta}{B'\beta} = \frac{C\gamma}{C'\gamma} = \frac{n}{m}, \qquad \frac{A'\alpha'}{A\alpha'} = \frac{B'\beta'}{B\beta'} = \frac{C'\gamma'}{C\gamma'} = \frac{m}{n}.$$

Il trouve

$$(m-n)^2\alpha\beta\gamma = m^2A'B'C' + n(m+n)ABC, \qquad (A)$$
$$(m-n)^2\alpha'\beta'\gamma' = n^2A'B'C' + m(m+n)ABC,$$
$$(m-n)(\alpha'\beta'\gamma' - \alpha\beta\gamma) = (m+n)(ABC - A'B'C')$$

La formule (A) convient à tous les cas, pourvu que m et n soient de même signe ou de signes contraires, suivant que α est sur l'un des prolongements de AA' ou entre A et A'.

(*) Pour des questions analogues à 225, voir *Mathesis*, IV, 112-114, 140.

Digitized by Google

Pour que les points α, β, γ soient en ligne droite, le triangle $\alpha\beta\gamma$ doit être nul; la formule (A) donne alors

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A'B'C'}{ABC}}\right).$$

Donc *à chaque point* O *intérieur au triangle* ABC *correspondent deux lignes droites dont chacune a la propriété de diviser les droites* AOA', BOB', COC' *dans un même rapport.*

M. Radicke propose à nos lecteurs de construire géométriquement ces deux droites. (J. N.)

Question 300.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 249.)

Le contour apparent d'un ellipsoïde de révolution allongé, par rapport à un plan quelconque, est une ellipse dont les foyers sont les projections, sur ce plan, des foyers de la section méridienne. (Th. Verstraeten.)

Solution par M. Barbelenet. Soient F et F' les foyers de l'ellipsoïde, M un point de cette surface où le plan tangent est perpendiculaire au plan de *projection* P, MN la normale en ce point. On a

$$\frac{FN}{FM} = \frac{F'N}{F'M} = \frac{FF'}{FM + F'M} = \frac{c}{a}; \quad FN = e.FM.$$

Soit φ l'angle de l'axe FF' avec P. La normale MN est parallèle à P, et, par suite, située dans le plan Q mené par M parallèlement à P. La distance FF_1 de F à Q est égale à $FN \sin\varphi = FM.\, e \sin\varphi$; d'où, en désignant par A l'angle F_1FM,

$$\cos\theta = \frac{FF_1}{FM} = e\sin\varphi.$$

Il résulte de là, que l'angle θ est invariable, lorsque M se déplace sur la courbe de contact de l'ellipsoïde avec le cylindre circonscrit dont les génératrices sont perpendiculaires à P. On a donc le théorème suivant qui est connu :

Si l'on coupe un ellipsoïde allongé par un plan quelconque passant par le centre, les cônes qui ont pour directrice commune la section et pour sommets les deux foyers sont deux cônes de révolution égaux, ayant leurs axes parallèles à la direction conjuguée du plan sécant.

Soient maintenant m, f, f' les projections de M, F, F' sur P. On vient

Digitized by Google

de voir que MF et MF′ font avec P l'angle constant $\frac{1}{2}\pi - \theta$. Conséquemment

$$mf + mf' = (\mathrm{MF} + \mathrm{MF}')\sin\theta = 2a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Le lieu de m est donc une ellipse ayant pour foyers f et f'.

Solution par M. Brocard. Considérons l'ellipse méridienne dans un plan perpendiculaire au plan de projection P. Soient F, F′, O les foyers et le centre; f, f', o les projections de ces points sur P; D et D′ les points de contact des tangentes menées à l'ellipse perpendiculairement à P; enfin d et d' les points de rencontre de ces tangentes avec P.

L'ellipsoïde se projette sur P suivant une ellipse ayant même petit axe que la méridienne, et pour grand axe dd'. La proposition 300 est donc renfermée dans l'égalité

$$\overline{od}^2 - b^2 = \overline{of}^2. \qquad (1)$$

Mais si la tangente Dd et sa parallèle Ff sont représentées par les équations

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad y = m(x - c)$$

on trouve facilement les valeurs

$$od = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad of = \frac{mc}{\sqrt{1 + m^2}},$$

qui vérifient l'égalité (1).

Autres solutions. A) Soient M un point de l'ellipsoïde où le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection P, MN et MT la normale et la tangente menées par M à la section méridienne correspondante, mn et mt les projections de ces droites sur P, enfin f, f' les projections des foyers F, F′ sur P. Le faisceau m ($ntff'$), projection d'un faisceau harmonique, est également harmonique; donc $of^2 = on.ot$. Mais l'angle droit NMT dont un côté NM est parallèle à P, se projette suivant un angle droit; donc mt et mn sont la tangente et la normale au contour apparent. Par suite, f et f' sont les foyers de cette courbe.

B) Le produit des distances de F et F′ à un plan tangent à l'ellipsoïde est constant. Lorsque ce plan est perpendiculaire à P, les deux distances se projettent sur P en véritable grandeur suivant les distances de f et f' à la tangente correspondante menée au contour apparent. Donc, etc.

Digitized by Google

c) Le lieu des projections de F sur les plans tangents à l'ellipsoïde est la sphère qui a pour diamètre l'axe focal. Lorsque le plan est perpendiculaire à P, la projetante est parallèle à P et, par suite, située dans un plan parallèle à P et mené par F; le lieu des projections sera alors une circonférence. On conclut de là que la podaire de f par rapport au contour apparent est une circonférence; donc etc. (J. N.)

Indications bibliographiques. L'intéressante propriété qui fait l'objet de la question 300 a été signalée, croyons-nous, pour la première fois, par M. C. Pelz, professeur à Graz (Autriche), dans les *Archives de Grunert*, t. 52, 1870-71, p. 313-333.

Le même auteur a publié de nombreuses conséquences de cette propriété et d'autres semblables dans les Bulletins des Académies de Prague et de Vienne. Voir aussi, sur des questions analogues, Steiner, *Journal de Crelle*, t. 37, 1848, et Chasles, *Aperçu historique*, § 361 et passim. (H. Brocard.)

×Question 343.

(Voir *Mathesis*, t. IV, pp. 143 et 159.)

Si x est compris entre 0 *et* 1, *on a*

$$\left[\mathrm{E}(x)\right]^p+\left[\mathrm{E}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]^p+\left[\mathrm{E}\left(x+\frac{2}{n}\right)\right]^p+\cdots+\left[\mathrm{E}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right]^p=\mathrm{E}(nx).$$

(E. Catalan.)

Solution par M. Van den Broeck. Les termes du premier membre valent 0 ou 1. Il y aura autant de termes égaux à 1 qu'il y a de valeurs entières de r satisfaisant à la relation

$$x+\frac{n-r}{n}\geqq 1.$$

On conclut de là

$$r\leqq nx;$$

ce qui démontre la formule proposée.

Solution par M. E. Cesàro. 1. Soit $[x]=q-1$ le plus grand nombre entier contenu dans x. Si l'on détermine l'entier t d'après les conditions

$$x+\frac{t-1}{n}<q\leqq x+\frac{t}{n}, \qquad (1)$$

Digitized by Google

il est évident que

$$[x] = \left[x + \frac{1}{n}\right] = \cdots = \left[x + \frac{t-1}{n}\right] = q - 1,$$

$$\left[x + \frac{t}{n}\right] = \left[x + \frac{t+1}{n}\right] = \cdots = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = q.$$

La somme de tous ces nombres est donc

$$t(q-1) + (n-t)\,q = nq - t.$$

Or, les conditions (1) donnent successivement

$$nq - t \leqq nx < nq - t + 1, \quad [nx] = nq - t.$$

Par conséquent,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]. \qquad (2)$$

Cette égalité a été rencontrée, par M. Hermite, dans la théorie des fonctions elliptiques (*).

2. Remarque. Les deux membres de (2) étant divisés par n, on obtient, en faisant croître n indéfiniment,

$$\int_a^{a+1} [x]\,dx = a. \qquad (3)$$

3. Plus généralement, la somme

$$[x]^p + \left[x + \frac{1}{n}\right]^p + \left[x + \frac{2}{n}\right]^p + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]^p$$

est égale à

$$t(q-1)^p + (n-t)\,q^p, \ (**)$$

c'est-à-dire à

$$[nx]\left\{[x+1]^p - [x]^p\right\} - n[x][x+1]\left\{[x+1]^{p-1} - [x]^{p-1}\right\}.$$

Cette quantité se réduit à $[nx]$, lorsque x est compris entre 0 et 1. On obtient, alors, l'identité proposée, qui ne diffère pas essentiellement de (2), parce que chaque terme du premier membre, étant 0 ou 1, n'est pas altéré par une élévation à puissance.

(*) *Acta Mathematica*, t. 5, n° 4.

(**) Catalan, Quelques théorèmes d'Arithmétique (*Mém. Acad. Belg.*, t. XLVI).

Digitized by Google

4. Remarque. En opérant comme plus haut, on trouve l'égalité suivante, généralisation de (3) :

$$\int_a^{a+1} [x]^p dx = a\{[a+1]^p - [a]^p\} - [a][a+1]\{[a+1]^{p-1} - [a]^{p-1}\}.$$

5. L'identité (2) est susceptible d'une intéressante généralisation. Écrivons l'égalité (2) en attribuant successivement à x les valeurs

$$x, \quad x+\frac{1}{\nu}, \quad x+\frac{2}{\nu}, \quad \ldots x+\frac{\nu-1}{\nu}.$$

La somme des premiers membres n'est autre que la somme des plus grands nombres entiers dans les quantités de la forme

$$x+\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}, \quad (m=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ \mu=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1).$$

Elle est donc symétrique par rapport à n et ν. Il en résulte

$$[\nu x] + \left[\nu\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] + \left[\nu\left(x+\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \left[\nu\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$
$$= [nx] + \left[n\left(x+\frac{1}{\nu}\right)\right] + \left[n\left(x+\frac{2}{\nu}\right)\right] + \cdots + \left[n\left(x+\frac{\nu-1}{\nu}\right)\right].$$

Pour $\nu = 1$, on retrouve (2).

×Question 364.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 175.)

Si p est un nombre premier avec 5(*),

$$p^{8n} + 3p^{4n} - 4$$

est divisible par 25. (de Rocquigny.)

Solution par M. Lemoine. L'expression proposée peut s'écrire

$$(p^{4n}-1)(p^{4n}+4).$$

Or, p^n peut être terminé par l'un des chiffres

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9;$$

(*) La restriction que p soit premier est inutile, ainsi que MM. Lemoine et Jamet l'ont remarqué.

Digitized by Google

par suite, le dernier chiffre des p^{4n} sera respectivement,

$$1, 6, 1, 6, 6, 1, 6, 1.$$

On voit immédiatement que les nombres $p^{4n} - 1$, $p^{4n} + 4$ sont terminés l'un par 0, et l'autre par 5.

Donc $p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ est divisible par 25, et même par 50.

Solution par M. JAMET. Soit a l'expression proposée. Nous pourrons écrire

$$4a = (2p^{4n} + 3)^2 - 25.$$

p étant premier avec 5, on a

$$p^n = \mathcal{M}\, 5 \pm 1 \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}\, 5 \pm 2,$$

$$p^{4n} = \mathcal{M}\, 5 + 1 \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}\, 5 + 16 = \mathcal{M}\, 5 + 1,$$

$$2p^{4n} + 3 = \mathcal{M}\, 5, \quad (2p^{4n} + 3)^2 = \mathcal{M}\, .25.$$

Donc le théorème est démontré.

Solution analogue par MM. FR. FALISSE et HENRARD.

×Question 378.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 216.)

Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les distances des quatre côtés au point de rencontre des diagonales.

Solution par M. MEURICE. Soient $OM = a$, $ON = b$, $OP = c$, $OQ = d$ les perpendiculaires abaissées du point d'intersection O des diagonales du quadrilatère inscriptible ABCD, sur les côtés AB, BC, CD, DA.

Le quadrilatère OMAQ étant inscriptible, on a

$$\text{angle OMQ} = \text{OAQ} = \text{DBC}, \quad \text{angle OQM} = \text{OAB} = \text{ODC}.$$

Par conséquent, les triangles OMQ, CBD sont semblables, et

$$\frac{\text{CB}}{\text{CD}} = \frac{a}{d}. \tag{1}$$

Les triangles semblables OMB et OPC, ONC et OQD donnent

$$\frac{\text{OB}}{\text{OC}} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\text{OC}}{\text{OD}} = \frac{b}{d},$$

d'où

$$\text{OB} : \text{OC} : \text{OD} = a : c : \frac{cd}{b}. \tag{2}$$

Digitized by Google

Les relations (1) et (2) permettent de construire une figure semblable à ABCD. En effet, sur une même droite, et dans des directions opposées, prenons les segments $O'B' = a$, $O'D' = \frac{cd}{b}$. Construisons le lieu des points dont les distances à B′ et D′ sont dans le rapport $a : d$. Soit C′ le point où ce lieu est rencontré par la circonférence décrite de O′ comme centre avec le rayon c et soit A′ le point où la droite C′O′ coupe la circonférence B′C′D′. Le quadrilatère A′B′C′D′ est semblable à celui qu'il s'agit de construire. Sur les perpendiculaires abaissées de O′ sur A′B′ et C′D′, prenons $O'M = a$, $O'P = c$, et par M et P, menons des parallèles à A′B′ et C′D′ rencontrant B′D′ et A′C′ aux points B, A, D, C.

Solution par M. Gob. Les triangles semblables OAB et ODC, OBC et OAD donnent

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a}{c}, \quad \frac{BC}{AD} = \frac{b}{d}.$$

Le quadrilatère OMAQ étant inscriptible, on voit facilement que les triangles OMQ, CBD sont équiangles; donc

$$\frac{BC}{CD} = \frac{a}{d}.$$

Par conséquent, on peut déterminer quatre longueurs proportionnelles aux côtés de ABCD, et construire un quadrilatère inscriptible semblable à ABCD, etc.

Remarque. On démontre sans difficulté que les droites MO, NO, PO, QO sont les bissectrices des angles du quadrilatère MNPQ. Donc celui-ci est circonscriptible à un cercle de centre O. Le problème 378 donne donc également une solution de la question suivante :

Construire un quadrilatère circonscriptible, connaissant les distances du centre du cercle inscrit aux quatre sommets.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**421.** Démontrer que l'aire d'un triangle ABC a pour expression

$$\frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)}.$$

(Cl. Thiry.)

Digitized by Google

×**422.** Soient A′, B′, C′ les symétriques des sommets d'un triangle ABC par rapport au centre O du cercle circonscrit, et soient A″, B″, C″ les symétriques de ces sommets par rapport aux perpendiculaires élevées aux milieux des côtés opposés. Démontrer : 1° que les circonférences A′A″O, B′B″O, C′C″O se coupent en un même point O′; 2° que le point O′ décrit une circonférence, lorsque la base BC est fixe et l'angle A constant. (A. LAMBERT.)

×**423.** Soient A′B′C′ le triangle formé par les tangentes menées aux sommets d'un triangle ABC inscrit dans le cercle O; A″, B″, C″ les points de rencontre du cercle avec les droites AA′, BB′, CC′; A‴, B‴, C‴ les milieux des côtés du triangle ABC. Démontrer que les circonférences AA″A‴, BB″B‴, CC″C‴ se coupent aux deux mêmes points.

(A. LAMBERT.)

424. Faire un changement de plans de projection tel que les nouvelles traces d'un plan donné se confondent sur l'épure en une même droite.

(J. SMEETS.)

×**425.** Etant donné l'angle A, construire l'angle B donné par la relation

$$\cos B \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \cos A \operatorname{tg}\frac{A}{2}. \qquad \text{(PH. GILBERT.)}$$

×**426.** Si $x = a$, $y = b$, $z = c$ forment un système de solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = (y + z)(x + z)(x + y),$$

un second système de solutions est

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \quad \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2}, \quad \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

×**427.** Si, des sommets d'un tétraèdre ABCD, dont le volume est V, on mène aux centres de gravité a, b, c, d des faces opposées les droites Aa, Bb, Cc, Dd, on pourra former, dans l'espace, un quadrilatère gauche $\alpha\beta\gamma\delta$ ayant ses côtés égaux et parallèles à Aa, Bb, Cc, Dd. De plus, le volume V du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ est les $\frac{16}{27}$ du volume V. (MOGNI.)

428. Étant donnés quatre points A, B, C, D, trouver le lieu géométrique du point de contact de deux circonférences variables tangentes entre elles et passant, l'une par A et B, l'autre par C et D. Trouver l'enveloppe de la tangente commune. (BARBARIN.)

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

Théorèmes sur la parabole,

par M. C. Bergmans(*).

I. Si d'un point A (x, y) on mène une sécante quelconque qui coupe une parabole en deux points B et C, le produit des deux segments AB et AC est égal au quadruple produit de la distance AM du point A à la courbe estimée parallèlement à l'axe, par la distance du foyer F à l'extrémité N du diamètre conjugué de la sécante.

On peut démontrer ce théorème en éliminant x, y entre l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole et les équations de la droite $\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \rho$, où ρ est la distance des points (X, Y), (x, y), en grandeur et en signe ; AB.AC est le produit des racines de l'équation résultante en ρ. La somme des racines a aussi une expression remarquable : elle est égale au rapport de huit fois le produit AM.FN à AD, D étant le point d'intersection de ABC avec la polaire du point A.

On peut encore arriver au théorème I comme il suit : Soient $y^2 = 2p'x$ l'équation de la parabole rapportée à la tangente en N et au diamètre conjugué, P et Q les pieds des ordonnées de A et M. On aura $AB.AC = (AP - BP)(AP + CP) = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{MQ}^2 - \overline{BP}^2 = 2p'.NQ - 2p'.NP = 2p'.PQ = 2p'.AM$. Or $2p' = 4FN$, d'après un théorème supposé connu. Donc $AB.AC = 4AM.FN$.

II. Si par un point A, pris sur l'axe de la parabole, on mène une corde quelconque, le produit des deux segments de la corde est égal au quadruple produit de la distance du point A au sommet de la parabole par la distance du foyer à l'extrémité du diamètre conjugué de la corde.

III. Le paramètre $2p$ de la parabole est une quatrième proportionnelle à la distance du foyer F à un point quelconque N de la parabole et aux deux segments FA, FB de la corde focale menée parallèlement à la tangente au point N.

Par suite, $p.p' = FA.FB$.

(*) La plupart des propositions sur la parabole qui vont suivre sont connues, ou peuvent se déduire des propriétés plus générales des courbes algébriques dues à Newton et Carnot. Elles offrent aux élèves de première scientifique l'occasion de se familiariser avec les *relations segmentaires*, trop négligées dans les cours par suite de l'emploi exclusif des coordonnées cartésiennes.

Digitized by Google

IV. Si par le foyer on mène une perpendiculaire à une corde focale quelconque et qu'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre avec la directrice, cette distance est une moyenne proportionnelle entre les deux segments de la corde focale.

Ce théorème et les quatre suivants peuvent être établies autrement.

V. La demi-circonférence décrite sur une corde focale comme diamètre touche la directrice en un point qui se projette 1° au foyer, si la projection est faite perpendiculairement à la corde focale; 2° au milieu de la corde focale, si elle est faite parallèlement à l'axe.

VI. Les tangentes menées aux extrémités d'une corde focale quelconque se coupent à angle droit sur la directrice, en un point qui se projette orthogonalement au foyer.

VII. Aux extrémités d'une corde focale on mène des tangentes à la parabole; soit D le point où elles se coupent sur la directrice. La distance du point D à la corde focale, estimée parallèlement à l'axe, est égale à la moitié de la corde focale.

VIII. La partie d'une tangente comprise entre le point de contact et la directrice est une moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et la corde focale.

IX. Si d'un point A pris hors de la parabole on mène une tangente à cette courbe : la portion de la tangente comprise entre le point A et le point de contact est une moyenne proportionnelle entre le double de la distance du point A à la parabole estimée parallèlement à l'axe et le double du rayon vecteur mené au point de contact.

X. Si d'un point A pris hors de la parabole on mène deux tangentes AN, AN′ à cette courbe, le carré du rapport de ces tangentes est égal au rapport des rayons FN, FN′ menés aux points de contact.

RECTIFICATIONS.

Dans le *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 7, ligne 9, R, au lieu de K, est le rayon du cercle $A_1A_2A_3$.

Dans le n° de février de *Mathesis*, p. 31, ligne 14, en remontant, lire *divers*, au lieu de *diverses*.

Digitized by Google

SUR LES OMBILICS DES SURFACES;

par E. CATALAN, professeur à l'Université de Liége.

La condition d'égalité entre les rayons principaux R_1, R_2 est, comme on sait(*),

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 + 4(s^2 - rt)(1+p^2+q^2) = 0. \quad (1)$$

Poisson démontre que le premier nombre est la somme de deux carrés; mais la méthode employée par l'illustre Géomètre, très ingénieuse, est assez pénible(**). Voici comment on peut la modifier.

I. Écrivons ainsi l'équation (1) :

$$4As^2 + 4Bs + C = 0, \quad (2)$$

en posant :

$$A = (1+p^2)(1+q^2), \quad (3)$$

$$B = -pq[(1+q^2)r + (1+p^2)t], \quad (4)$$

$$C = [(1+q^2)r + (1+p^2)t]^2 - 4rt(1+p^2+q^2)$$
$$= (1+q^2)^2 r^2 + 2[(1+p^2)(1+q^2) - 2(1+p^2+q^2)]rt + (1+p^2)^2 t^2,$$

ou

$$C = (1+q^2)^2 r^2 + 2[p^2q^2 - (1+p^2+q^2)]rt + (1+p^2)^2 t^2. \quad (5)$$

De l'équation (2), on tire

$$2s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (6)$$

Or,

$$B^2 - AC = p^2q^2(1+q^2)^2 r^2 + 2p^2q^2(1+q^2)(1+p^2)rt + p^2q^2(1+p^2)^2 t^2$$
$$- (1+p^2)(1+q^2)^2 r^2 - 2(1+p^2)(1+q^2)[p^2q^2 - (1+p^2+q^2)]rt$$
$$- (1+p^2)^2(1+q^2)t^2 = -(1+p^2+q^2)(1+q^2)^2 r^2$$
$$+ 2(1+p^2)(1+q^2)(1+p^2+q^2)rt - (1+p^2+q^2)(1+p^2)^2 t^2,$$

ou

$$B^2 - AC = -(1+p^2+q^2)[(1+q^2)r - (1+p^2)t]^2, \quad (7)$$

quantité *négative* ou *nulle*.

(*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, par LEROY; p. 330.

(**) *Loc. cit.* On doit observer que, la surface donnée étant *convexe*, la binôme $s^2 - rt$ est *négatif*.

Digitized by Google

II. Les valeurs de s étant *imaginaires*, à moins que $B^2 - AC = 0$, le premier membre de l'équation (2) est une somme de deux carrés. Cette équation équivaut à

$$(2As + B)^2 - (B^2 - AC) = 0. \tag{8}$$

Elle se décompose en

$$B^2 - AC = 0, \quad s = -\frac{B}{2A};$$

ou

$$(1 + q^2)r = (1 + p^2)t, \quad s = \frac{pqr}{1 + p^2}.$$

Donc,

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}; \tag{9}$$

équations des ombilics.

III. Remarque. D'après ce qui précède, on a, *identiquement*,

$$\begin{aligned}&(1 + p^2)(1 + q^2)[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 \\ &\quad + 4(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + p^2 + q^2)(s^2 - rt) \\ &= \{2(1 + p^2)(1 + q^2)s - pq[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t]\}^2;\end{aligned}$$

ou, par un changement de lettres :

$$\begin{aligned}&(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)[(x + aby)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)c^2y^2] \\ &= [abx + (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)y]^2 + (a^2 + b^2 + c^2)c^2x^2.\end{aligned}$$

IV. Autre remarque. Dans cette identité, dont la vérification est facile, le premier membre, développé, est une somme de *seize* carrés; et le second membre, une somme de *quatre* carrés. La théorie des surfaces peut donc, comme la théorie des courbes, être appliquée à l'arithmétique(*).

NOTES MATHÉMATIQUES.

2. Volume d'un prismatoïde (Voir p. 9-10). *Le volume* V *d'un solide terminé par deux bases parallèles et tel qu'une section, faite parallèlement à la base inférieure* B_0 *à la distance* x, *ait une aire* $u = ax^3 + bx^2 + cx + g$, *a pour expression,* $V = \frac{1}{6}h(B_0 + 4C + B_1)$, h *représentant la distance entre les deux bases* B_0 et B_1, *et* C *une section équidistante des deux bases.*

(*) Voir, par exemple, N. C. M., 1877, t. III, p. 24. Comparer sur la question des ombilics : *N. A. M.*, 1866, (2) V, 354 (Mister et Neuberg); *Journal de Crelle*, t. 64, p. 187 (Henrici); t. 67, p. 320 (Souillart).

Digitized by Google

Supposons la hauteur h divisée en n parties égales, et par les points de division, menons des plans parallèles aux bases; nous obtiendrons ainsi n petits volumes que l'on peut assimiler à des cylindres, dans une limite de somme. En désignant par v le volume de l'un quelconque de ces cylindres, on a évidemment

$$v = (ax^3 + bx^2 + cx + g)\frac{h}{n}.$$

Si, avant la base supérieure de ce cylindre, il y a p divisions, on peut poser

$$x = p\frac{h}{n}, \quad v = \left(ap^3\frac{h^3}{n^3} + bp^2\frac{h^2}{n^2} + cp\frac{h}{n} + g\right)\frac{h}{n}.$$

Par suite, on a pour V′, somme de n volumes v,

$$V' = \frac{ah^4}{n^4}Sp^3 + \frac{bh^3}{n^3}Sp^2 + \frac{ch^2}{2}Sp + gh;$$

Sp^3, Sp^2, Sp étant la somme des cubes, la somme des carrés et la somme des n premiers nombres entiers, de sorte que

$$Sp = \tfrac{1}{2}n(n+1), \quad Sp^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad Sp^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Donc

$$V' = \frac{ah^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{bh^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \frac{ch^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + gh,$$

et, à la limite, faisant tendre n vers l'infini,

$$V = \frac{ah^4}{4} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^2}{2} + dh = \frac{h}{12}(3ah^3 + 4bh^2 + 6ch + 12g).$$

Mais

$$2B_0 = 2d; \quad 2B_1 = 2ah^3 + 2bh^2 + 2ch + 2g; \quad 8C = ah^3 + 2bh^2 + 4ch + 8g.$$

Par suite,

$$V = \frac{h}{6}(B_0 + 4C + B_1).$$

Le même genre de démonstration peut encore s'appliquer quand l'aire de la section u est une expression de la forme $A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$ et on retrouverait, de cette manière les formules du géomètre Côtes pour les quadratures des paraboles quelconques (G. J. Latars, professeur à l'École du génie, à Grenoble)(*).

(*) L'intégration de $x^m dx$, par des procédés élémentaires, a été exposée plusieurs fois dans *Mathesis*. Voir II, 52 (Jamet); V, 43-44 (Fermat). (P. M.)

Digitized by Google

3. *Sur la dérivée n^ième d'une fonction de fonction*.. M. Hoppe nous fait observer que sa formule pour la dérivation des fonctions de fonction n'est pas identique à celle qui est marquée (H), dans la notice publiée au tome premier de *Mathesis*, p. 22-23. La formule (H) se trouve dans BERTRAND, *Calcul différentiel*, n° 308, p. 308-309. La formule de M. Hoppe, au contraire, est au fond identique aux autres formules indiquées à l'endroit cité et c'est à elle que se rapporte les autres renseignements historiques contenus dans la notice.

Signalons, à cette occasion, un article récent de notre collaborateur M. E. Cesáro, N. A. M., 1885, (3) IV, 41-55. (P. M.)

×**4**. *Sur la question* 91 (Voir pp. 14, 48, 56). Ce problème se rattache à l'étude des *suites de Farey*, dont il a été question dans *Mathesis*, t. I, p. 161-163. Voir aussi J. FAREY, *Phil. Magaz.*, t. 47, 1816, p. 385-386; CAUCHY, *Bull. de la Soc. philom. de Paris*, 1816, p. 112 et 133, et *Exerc. de math.*, t. I, 1826, p. 114-116; GODWYN, *Tabular Series*, 1818 et 1823; STOUVENEL, *Journal de Liouville*, t. V, 1840, p. 265-275; H. S. SMITH, *Mess. of math.*, t. VI, 1876, p. 7-14; HALPHEN, *Bull. de la Société math. Paris*, t. V, p. 170-175, et VI, p. 137; ED. LUCAS, *Ib.*, t. VI, p. 118-119; J. W. L. GLAISHER, *Phil. Mag.*, mai 1879, p. 321-336. (Note communiquée par M. H. BROCARD).

BIBLIOGRAPHIE.

A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, containing an easy Introduction to Modern Geometry, with numerous Examples by JOHN CASEY, LL. D., F. R. S., Fellow of the Royal University of Ireland, Professor of the Higher Mathematics and of Mathematical Physics in the Catholic University(*)

(*) Il y a trois universités à Dublin : l'Université royale, qui est anglicane, l'Université de la Reine, qui, officiellement, est neutre, et l'Université catholique, fondée par l'épiscopat irlandais. Salmon est professeur dans la première; Allman, l'ingénieux historien de la Géométrie avant Euclide, dans la seconde; Casey, dans la troisième. Ce dernier est l'auteur de quatre grands mémoires de Géométrie supérieure : *On Bicircular Quartics* (1867); *On Cyclides and Sphero-Quartics* (1871); *On a new Form of Tangential Equation* (1877; avec d'importantes additions de Cayley); *On Cubics Transformations* (1880), ensemble près de 500 pages in 4°, sans compter d'autres mémoires, entre autres, celui qui est intitulé : *On the Equations of Circles*, dont les principaux résultats sont devenus classiques et ont passé dans les *Sections coniques* de Salmon.

Digitized by Google

of Ireland. Third Edition, revised and enlarged. Dublin : Hodges, Figgis, and Co.; London : Longmans, Green, and Co. 1884. Volume in 12 cartonné à l'anglaise de XVI-175 pages, avec 150 figures dans le texte. Prix : 4 fr. 50.

A Sequel to Euclid de M. J. Casey est un de ces livres classiques dont le succès n'est plus à faire. La première édition a paru en 1881, la seconde en 1882, la troisième en 1884 et l'on peut prédire, sans crainte de se tromper, qu'elle sera suivie de beaucoup d'autres. C'est un ouvrage analogue aux *Théorèmes et Problèmes de Géométrie* de M. Catalan, et il a les mêmes qualités : il est clair, concis, et renferme beaucoup de matières, sous un petit volume. Mais là se bornent les ressemblances : comme l'indique le titre, il se rattache à Euclide et non à Legendre et ne traite que de géométrie plane. De plus, outre les théorèmes démontrés et les problèmes résolus, il contient plus de deux cent cinquante exercices proposés au lecteur.

Les quatre premiers livres de l'ouvrage correspondent aux quatre premiers d'Euclide(*), c'est-à-dire, à peu près, comme l'on sait, aux livres I, II et à la première partie du livre III de Legendre. On y trouve, dès le début, des questions assez générales, comme la théorie du centre des distances proportionnelles, l'usage des signes + et —, pour réunir des propositions analogues etc. Les propositions choisies sont celles qui ont une certaine célébrité (cercle des neuf points, droite de Simson) ou une utilité spéciale (lieux géométriques divers).

Le sixième livre de l'ouvrage de Casey est aussi étendu à lui seul que les quatre premiers. Il occupe les pages 67 à 158, c'est-à-dire la moitié du volume. C'est, en réalité, une *Introduction à la Géométrie supérieure*, divisée en huit sections (le titre de la VII^e^ manque à la table des matières). I. Transversales; relations entre le rayon du cercle circonscrit, les côtés et la surface d'un triangle; figures homologiques. II. Centre de similitude de deux cercles. III. Division harmonique. IV. Transformation par rayons vecteurs réciproques. V. Théorie des axes radicaux. VI. Rapport anharmonique. VII. Polaires réciproques et principe de dualité. VIII. Exercices (plus de cent). Dans cette partie de l'ouvrage, on rencontre des démonstrations d'une rare élégance dues à M. Casey lui-même.

Le livre se termine par des propositions et exercices supplémentaires. Nous avons remarqué avec plaisir que cet appendice est consacré surtout à ces propriétés du triangle et de certains cercles spéciaux trouvées par nos collaborateurs, MM. Brocard et Lemoine, et par M. Tucker. Ces propriétés, dont l'étude est continuée par divers géomètres, ont été le point de départ d'un développement inattendu de la géométrie du triangle.

A Sequel to Euclid sort des presses de l'Université royale d'Irlande qui s'est honorée en imprimant l'ouvrage dû au savant professeur d'une Université rivale. C'est assez dire que l'exécution matérielle en est très-soignée. On a employé pour les termes *angle*, *triangle*, *parallélogramme*, *cercle*, *perpendiculaire* et *parallèle* qui

---

(*) Il n'y a pas d'addition au livre V d'Euclide, qui contient, comme l'on sait, la théorie générale des proportions entre grandeurs.

Digitized by Google

reviennent souvent, des signes spéciaux(*) qui abrègent considérablement les démonstrations, sans en rendre notablement la lecture plus difficile. Nous remarquons aussi quelques expressions abréviatives que nous voudrions pouvoir employer en français : *collinéaires*, *concycliques*, pour *situés sur une même droite*, *sur un même cercle*.

Nous recommandons vivement le livre de M. Casey aux professeurs et aux élèves de nos collèges. Il ne fera pas double emploi avec ceux de MM. Catalan, Petersen et Van den Broeck. Les démonstrations et les solutions que l'on y rencontre ne sont pas celles que l'on trouve partout; beaucoup d'entre elles sont originales(**). Les nombreux corollaires que M. Casey ajoute à la plupart des théorèmes ne peuvent manquer d'éveiller l'esprit d'observation chez ceux qui pratiqueront son livre; les exercices qui en suivent chacune des grandes divisions permettront au lecteur de se familiariser avec les propositions et les théories nouvelles qui y sont exposées. (P. M.)

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE (***).

(Suite, voir *Mathesis*, t. IV, p. 57.)

21. *On partage la suite des nombres impairs en groupes tels que le n^e groupe ait $\frac{1}{2}n(n+1)$ termes. La somme des termes de ce groupe est*

$$(1+2+\cdots+n)(1^2+2^2+\cdots+n^2).$$

On fait la somme des termes des n premiers groupes et celle des termes des $(n-1)$ premiers groupes; on soustrait ensuite la seconde somme de la première.

22. *On partage la suite des nombres impairs en groupes tels que le n^e renferme np^α termes, p et α étant donnés. Le n^e groupe a pour somme $n^3.p^{2\alpha}$.*

Corollaire. Si α est un multiple de 3, chaque groupe a pour somme un cube.

23. *La somme des n^2 nombres entiers qui suivent les n premiers est double de la somme des n premiers cubes.*

23. *On partage la suite naturelle des nombres en groupes tels que le n^e groupe renferme p^n termes. La somme des termes de ce groupe est*

$$\frac{p^n(p^n-1)(p+1)}{2(p-1)}.$$

(*) Employés aussi par M. Retsin dans ses *Théorèmes et problèmes de Géométrie et de trigonométrie*, bon ouvrage dont la dernière édition est restée inachevée.

(**) Signalons, en particulier, certaines questions relatives aux maxima et minima (Prop. 19 et cor. 2, p. 14; Prop. 18, p. 39); les théorèmes sur l'inversion des systèmes de cercles et les conséquences pour le cercle des neuf points; etc. etc.

(***) Extraites de lettres de M. DE ROCQUIGNY, capitaine au 110e, à Dunkerque.

Digitized by Google

Si l'on fait de même pour la suite des nombres impairs, le n^e groupe aura pour somme

$$\frac{p^{n+1}(p^n + p^{n-1} - 2)}{p-1}.$$

24. *On partage la suite des nombres impairs en groupes consécutifs comprenant chacun un même nombre p de termes. Quels sont les groupes dont la somme est un carré?*

Le rang du groupe est la somme de deux carrés consécutifs.

25. *La somme des cubes pairs de rang impair, augmentée de l'unité, est égale à un carré.*

26. *Si l'on partage la suite des cubes impairs en groupes consécutifs dont le n^e renferme n termes, la somme des termes de ce groupe est* $n^7 + n^5 - n^3$. Donc $n^7 + n^5$ est décomposable en $n + 1$ cubes.

27. *La différence entre le cube de la somme et la somme des cubes des n premiers nombres impairs est un carré.*

28. *Soit la suite*

$$1.3 + 5.7 + 9.11 + \cdots (4n-3)(4n-1).$$

1° *La somme des n premiers termes est égale à* $\frac{1}{3} n (16n^2 - 7)$. 2° *La somme des termes de rang pair diminuée de la somme des termes de rang impair est le double d'un carré.* 3° *La somme des carrés des n premiers termes est égale à* $\frac{1}{15} n (768n^4 - 800n^2 + 167)$.

29. *La différence des cubes de deux nombres qui diffèrent de deux unités est une somme de trois carrés.*

$$(a+1)^3 - (a-1)^3 = (a+1)^2 + (a-1)^2 + (2a)^2.$$

30. *Si deux nombres diffèrent de deux unités, la différence de leurs cinquièmes puissances est la somme de trois carrés.*

$$(a+1)^5 - (a-1)^5 = (3a^2+1)^2 + (a^2-1)^2 + (4a)^2.$$

31. *Soit* $A = m^2 + n^2$, $B = m^2 - n^2$. *Les nombres*

$$A^3 + B^3, \quad A^3 - B^3, \quad \tfrac{1}{2}(A^3 + B^3), \quad \tfrac{1}{2}(A^3 - B^3)$$

sont chacun la somme de trois carrés. On trouve en effet, pour ces expressions,

$$(m^3 + mn^2)^2 + (m^3 - mn^2)^2 + (2mn^2)^2,$$
$$(n^3 + nm^2)^2 + (n^3 - nm^2)^2 + (2nm^2)^2,$$
$$(mn^2 - nm^2)^2 + (mn^2 + nm^2)^2 + (mn^2 - m^3)^2,$$
$$(nm^2 - mn^2)^2 + (nm^2 + mn^2)^2 + (nm^2 - n^3)^2.$$

Digitized by Google

32. $(m^2+n^2)^5$ *est :* 1° *la somme de deux carrés :* $(3m^2n-n^5)^2+(m^5-3mn^2)^2$; 2° *la somme de trois carrés :* $(m^5-mn^2)^2+(m^2n+n^5)^2+(2m^2n)^2$; 3° *la somme de quatre carrés :* $(2mn^2)^2+2m^2n)^2+(m^2n-n^5)^2+(m^5-mn^2)^2$; 4° *la somme de six carrés, savoir ceux des deux dernières lignes du n°* 31.

33. *On peut trouver une infinité de nombres qui sont, de deux manières différentes, décomposables en cinq carrés.* En effet (voir n° 18),

$$(2n-3)^2+(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+16p^2=$$
$$(2p-3)^2+(2p-1)^2+(2p+1)^2+(2p+3)^2+16n^2.$$

34. *La différence entre la somme des carrés des n premiers nombres pairs et la somme des carrés des n premiers nombres impairs est égale à* $n(2n+1)$.

Conséquence. On peut choisir n de manière que $n(2n+1)$ soit un carré. Alors on aura une solution du problème suivant : trouver un nombre qui soit, à la fois, la somme de n carrés et la somme de $n+1$ carrés(*).

35. On a(**)

$$S_1^n(4p-1)^5-S_1^n(4p-3)^5=32n^5-6n.$$

Conséquence. Comme

$$32n^5-6n=(2n)^5+(3n)^5-(n-1)^5-n^5-(n+1)^5,$$

on aura aussi

$$S_1^n(4p-1)^5+(n-1)^5+n^5+(n+1)^5=S_1^n(4p-3)^5+(2n)^5+(3n)^5,$$

Cette identité fait connaître une somme de $(n+3)$ cubes, décomposable en $(n+2)$ cubes.

36.
$$S_1^n(4p-1)^4-S_1^n(4p-3)^4=128n^4-48n^2,$$
$$S_1^n(4p-1)^5-S_1^n(4p-3)^5=2n(16n^2-5)^2.$$

37. Soit $S_{m,n}$ la somme des puissances m^{es} des n premiers nombres entiers. On a

$$S_{1,n}^3-S_{3,n}=S_{1,n-1}\times S_{1,n}\times S_{1,n+1}.$$

(*A continuer.*)

(*) Autre solution de ce problème, N. C. M., t. VI, p. 95.

(**) Nous désignons par $S_1^n f(p)$ la somme $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$. Le lecteur trouvera facilement la question analogue au n° 35 pour des sommes de carrés.

Digitized by Google

SUR UNE LOI SYMBOLIQUE REMARQUABLE(*),

par M. E Cesàro, élève-ingénieur, étudiant à Rome.

I. Si les nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \tag{1}$$

peuvent être groupés deux à deux, de manière que la somme des termes de chaque groupe soit constante, et égale à N, il est clair que la série

$$N - u_1, \quad N - u_2, \quad N - u_3, \quad \ldots, \quad N - u_n,$$

ne diffère pas de la série (1). Il en résulte que l'on peut écrire

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = f(N - u_1, N - u_2, \ldots, N - u_n),$$

f étant une fonction *symétrique*.

II. Première Application. 1° Si l'on pose

$$S_m = u_1^m + u_2^m + u_3^m + \cdots + u_n^m,$$

on a aussi

$$S_m = (N - u_1)^m + (N - u_2)^m + \cdots + (N - u_n)^m;$$

ou bien,

$$S_m = N^m S_0 - C_{m,1} N^{m-1} S_1 + C_{m,2} N^{m-2} S_2 - \cdots \pm S_m, \tag{2}$$

ou encore, sous forme *symbolique* :

$$S^m = (N - S)^m. \tag{3}$$

2° Pour $m = 1$, ou $m = 2$, la relation (3) devient

$$NS_0 - 2S_1 = 0. \tag{4}$$

Pour $m = 3$, ou $m = 4$:

$$N^2 S_0 - 3N^2 S_1 + 3NS_2 - 2S_3 = 0.$$

L'élimination de S_0, entre ces deux relations, donne

$$N^2 S_1 - 3NS_2 + 2S_3 = 0. \tag{5}$$

3° Plus généralement, si l'on représente par le *symbole* $f(S)$ l'expression

$$S_0 f(0) + \frac{S_1}{1} f'(0) + \frac{S_2}{1.2} f''(0) + \frac{S_3}{1.2.3} f'''(0) + \cdots$$

(*) Cet article contient la solution des questions 67 (*Mathesis*, t. I, p. 168).

Digitized by Google

on peut écrire, d'après (3),

$$f(S) = f(N - S).$$

Par exemple, pour $f(x) = x^\alpha (N - x)^{\alpha+1}$, on obtient

$$S^\alpha (N - S)^{\alpha+1} = S^{\alpha+1} (N - S)^\alpha,$$

ou bien

$$S^\alpha (N - S)^\alpha (N - 2S) = 0.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$,

$$S (N - S) (N - 2S) = 0.$$

C'est, *sous forme symbolique*, la relation (5). Pour $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, etc., on a

$$N^2S_2 - 4N^2S_3 + 5NS_4 - 2S_5 = 0,$$
$$N^4S_3 - 5N^3S_4 + 9N^2S_5 + 7NS_6 + 2S_7 = 0, \text{ etc.}$$

4° Si A_p est la *moyenne arithmétique des puissances $p^{èmes}$* des nombres u, on a $A_p = \frac{S_p}{S_0}$. Remplaçant S_p par A_pS_0, dans l'égalité (2), celle-ci devient

$$A^m = (N - A)^m. \qquad (6)$$

Cette relation a même forme que (3); mais, au lieu de $S_0 = n$, on a $A_0 = 1$, ce qui est préférable.

III. Cas particuliers. 1° Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les $\varphi(N)$ nombres, non supérieurs et premiers à N. Si α est premier avec N, il en est de même de $N - \alpha$. Il en résulte que les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ peuvent être groupés deux à deux, de manière que la somme des termes de chaque groupe soit N. Ces nombres jouissent donc des propriétés signalées dans les paragraphes précédents. En particulier, la relation (6) est vraie, conformément à la *première partie* de la *Question* 67 (*Mathesis*, t. I, p. 168).

2° La relation (5) est vraie aussi. Cette relation fait l'objet de la 6^{me} *Question* de M. Rocquigny. (*Mathesis*, t. III, p. 18). On la vérifie aisément au moyen de la formule connue

$$S_1 = \tfrac{1}{2} N\varphi(N), \qquad (4)$$

jointe aux *formules de Thacker* (Journal de Crelle, t. XL, p. 89.) :

$$S_2 = \frac{1}{3} N^2\varphi(N)\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi(N)}{N^2}\right], \quad S_3 = \frac{1}{4} N^3\varphi(N)\left[1 + \frac{\pi(N)}{N^2}\right],$$

dans lesquelles $\pi(N)$ est le produit des facteurs *premiers* de N, autres que 1, chacun d'eux étant pris négativement.

Digitized by Google

IV. Deuxième application. 1. Soit σ_m la somme des produits m à m des termes de la série (1), de manière que

$$\sigma_m = u_1u_2u_3\dots u_m + u_1u_2u_4\dots u_{m+1} + u_2u_3u_4\dots u_{m+1} + \cdots$$

On peut encore écrire

$$\sigma_m = (N-u_1)(N-u_2)\dots(N-u_m) + (N-u_1)(N-u_3)\dots(N-u_{m+1}) + \cdots$$

ou bien, en développant,

$$\sigma_m = C_{n,m}N^m - C_{n-1,m-1}N^{m-1}\sigma_1 + C_{n-2,m-2}N^{m-2}\sigma_2 - \cdots \pm \sigma_m \quad (7)$$

2° Si B_m est la *moyenne arithmétique des produits m à m* des nombres u, on a $B_m = \frac{\sigma_m}{C_{n,m}}$. Remplaçant σ_m par $C_{n,m}B_m$, dans la relation (7), celle-ci devient

$$B_m = N^m - C_{m,1}N^{m-1}B_1 + C_{m,2}N^{m-2}B_2 \cdots \pm B_m,$$

ou bien, sous forme *symbolique :*

$$B^m = (N - B)^m. \quad (8)$$

3° On démontrerait, comme précédemment, l'identité plus générale

$$f(B) = f(N - B),$$

qui renferme, comme cas très particulier, l'identité suivante :

$$N^2B_1 - 3NB_2 + 2B_3 = 0. \quad (9)$$

V. Cas particulier. Si les nombres u sont les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, considérés plus haut, il est évident que les formules du dernier paragraphe ne cessent pas d'être vraies. Il en est ainsi, par exemple, de la formule (8). Cela démontre la *seconde partie* de la *Question* 67. Il en est de même de l'identité (9), qu'il est aisé de vérifier au moyen des formules

$$B_1 = \frac{1}{2}N,$$

$$B_2 = \frac{1}{4}N^2\left\{1 - \frac{1}{3(\varphi - 1)}\left[1 + 2\frac{\pi(N)}{N^2}\right]\right\},$$

$$B^3 = \frac{1}{8}N^3\left\{1 - \frac{1}{\varphi - 1}\left[1 + 2\frac{\pi(N)}{N^2}\right]\right\}.$$

VI. Remarque. Si, au lieu de considérer les nombres u, on considère leurs rapports à N, on trouve la relation symbolique

$$\nu^m = (1 - \nu)^m, \quad (10)$$

qui représente une infinité de séries, jouissant toutes de cette propriété

Digitized by Google

remarquable : *Le p^{me} terme est la $(p-1)^{me}$ différence du premier terme.* Les différences doivent être prises en retranchant chaque terme du précédent. Si l'on prend $\nu_0 = 1$, on a nécessairement $\nu_1 = \frac{1}{2}$, mais les termes suivants peuvent recevoir les valeurs les plus différentes. Parmi les séries qui obéissent à la loi (10), avec la condition initiale $\nu_0 = 1$, nous ferons remarquer les suivantes : 1° La série harmonique :

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \nu_2 = \tfrac{1}{3}, \quad \nu_3 = \tfrac{1}{4}, \quad \nu_4 = \tfrac{1}{5}, \quad \ldots.$$

2° Une progression géométrique :

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \nu_2 = \tfrac{1}{4}, \quad \nu_3 = \tfrac{1}{8}, \quad \nu_4 = \tfrac{1}{16}, \quad \ldots.$$

3° Les *Nombres de Bernoulli* :

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \nu_2 = \tfrac{1}{6}, \quad \nu_3 = 0, \quad \nu_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad \ldots.$$

Parmi les séries représentées par (10), cette dernière est *la seule* qui réponde aux conditions $\nu_3 = \nu_5 = \nu_7 = \nu_9 = \ldots = 0$

4° Parmi les mêmes séries, *la seule* qui réponde aux conditions $\nu_2 = \nu_4 = \nu_6 = \nu_8 = \ldots = 0$, s'obtient en multipliant les termes de la série précédente, abstraction faite du premier, respectivement par

$$(2^2 - 2), \quad \tfrac{1}{2}(2^3 - 2), \quad \tfrac{1}{3}(2^4 - 2), \quad \tfrac{1}{4}(2^5 - 2), \quad \tfrac{1}{5}(2^6 - 2), \quad \ldots.$$

ce qui donne

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = -\tfrac{1}{4}, \quad \nu_4 = 0, \quad \ldots.$$

5° Les coefficients des puissances successives de x, dans le développement de $\frac{1}{e}(1-x)^{-\frac{1}{x}}$. Ainsi,

$$\nu_0 = 1, \quad \nu_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \nu_2 = \tfrac{11}{24}, \quad \nu_3 = \tfrac{7}{16}, \quad \nu_4 = \tfrac{2447}{5760}, \quad \ldots.$$

25 février 1883.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 106.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 48.)

Démontrer les théorèmes suivants : 1° *Si p est premier avec n et $n-1$, et que $p-1$ soit premier avec $n-1$, le nombre combinatoire $C_{n,p}$ est divisible par $n(n-1)$;* 2° *Si $p+1$ est premier avec $n+1$ et si $p+2$ est premier avec $n+1$ et $n+2$, $C_{n,p}$ est divisible par $(p+1)p+2)$.*

(E. Cesáro.)

On peut écrire

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} C_{n-2,p-2}.$$

Digitized by Google

Les nombres $C_{n,p}$, $C_{n-2,p-2}$ étant entiers et p étant premier avec n et $n-1$, p doit diviser $C_{n-2,p-2}$. De même,

$$\frac{n-1}{p-1} C_{n-2,p-2} = C_{n-1,p-1} = \text{entier};$$

Comme $p-1$ est premier avec $n-1$, il doit diviser $C_{n-2,p-2}$. Donc $C_{n-2,p-2}$ est divisible par les nombres p, $p-1$ qui sont premiers entre eux; il est donc divisible par leur produit et l'on peut poser

$$\frac{C_{n-2,p-2}}{p(p-1)} = E, \qquad (1)$$

E étant un nombre entier. Par suite

$$C_{n,p} = n(n-1)E,$$

ce qui démontre le premier théorème.

L'égalité (1) renferme le second théorème de la question : il suffit de changer n et p en $n+2$ et $p+2$.

M. Van den Broeck a donné de la même question, une solution exacte un peu moins simple. La précédente se rapproche de celle de l'auteur des théorèmes. (J. N.)

×Question 235.

(Voir *Mathesis*, t. III, pp. 94 et 144.)

Soient un angle fixe droit xOy et deux points fixes, A *sur* Ox, B *sur* Oy. *On porte respectivement sur* Ox et Oy *les longueurs* AA′ *et* BB′ *proportionnelles aux nombres donnés* m, n *et l'on divise* A′B′ *au point* M *dans le rapport* $m^2 : n^2$. *Démontrer :* 1° *que le lieu de* M *est une droite;* 2° *que la perpendiculaire élevée sur* A′B′ *au point* M *passe par un point fixe* F; 3° *que la droite* A′B′ *est tangente à une parabole ayant* F *pour foyer.*

(Barbarin.)

Solution géométrique par M. P. Ruex. 1° Menons BP parallèle à OA, A′P parallèle à AB. Joignons PB′ et abaissons la perpendiculaire BM_1 sur PB′; M_1 divisera PB′ dans le rapport $m^2 : n^2$; PB′ a évidemment une direction constante, donc aussi BM_1. Menons M_1M parallèle à A′P ou AB et rencontrant B′A′ en M. Le point M divisera A′B′ dans le rapport $m^2 : n^2$ et on aura aussi $M_1M : PA'$ ou $AB = n^2 : m^2 + n^2$. Donc le lieu de l'extrémité M de la droite M_1M de longueur et de direction constante est une droite MN, parallèle à BM_1 et rencontrant AB en N.

Digitized by Google

2° Sur AB comme hypoténuse, du même côté que O, construisons un triangle rectangle dont le sommet F se projette sur AB en N. Le triangle FA'B' est rectangle et FM est perpendiculaire sur A'B'. En effet, l'angle FBO = FAO, comme ayant même mesure dans le demi-cercle construit sur AB comme diamètre; donc les suppléments FBB', FAA' sont égaux; on a ensuite FA : FB = $m : n$ = AA' : BB'. Les triangles FAA', FBB' étant semblables, l'angle AFA' = l'angle BFB', et, par suite, l'angle A'FB' = l'angle AFB = un angle droit, et FA' : FB' = $m : n$. Donc la ligne FM est perpendiculaire sur A'B'.
3° La parabole qui a F pour foyer et MN pour tangente au sommet touche A'B'.

Solution analogue par M. Liénard, pour la première et la troisième partie. M. Liénard ne donne pas la construction de F, dont il prouve l'existence par l'analyse.

Solution analytique par MM. Pisani, Gillet, Gob, Lambert, Bastin et Liénard. Posant OA = a, OB = b, on trouve aisément, pour le lieu du point M,

$$mx - ny = \frac{mn(an - bm)}{m^2 + n^2}. \qquad (1)$$

La droite A'B' qui a pour équation

$$\frac{x}{a + \lambda m} + \frac{y}{b + \lambda n} = 1,$$

où λ est un paramètre variable, enveloppe la parabole représentée par

$$(nx + my - na - mb)^2 + 4mn(bx + ay - ab) = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$(nx + my + \mu)^2 + px + qy + r = 0,$$

μ étant une constante quelconque, p, q, r des constantes dépendant de μ et faciles à trouver. En déterminant μ par la condition que les droites ayant pour équations

$$px + qy + r = 0, \quad nx + my + \mu = 0$$

soient perpendiculaires, la première devient la tangente au sommet, la seconde l'axe de la parabole. On trouve ainsi que la tangente au sommet coïncide avec la droite (1), lieu du point M. La perpendiculaire menée par M à A'B', tangente à la parabole, passe donc par le foyer F de la parabole.

Digitized by Google

On peut encore établir cette proposition en remarquant que la perpendiculaire élevée en M sur A'B' a pour équation

$$\lambda\left[ny - mx + \frac{2mn(an - bm)}{m^2 + n^2}\right] + \frac{an^2 - bm^2}{m^2 + n^2} + by - ax = 0.$$

Les coordonnées de F annulent séparément le coefficient de λ et la partie indépendante de λ dans cette équation.

×Question 240.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 95.)

***Trouver**, à l'intérieur d'un triangle* ABC, *le point* M *tel que le triangle* A'B'C', *ayant pour sommets les points de rencontre des côtés de* ABC *par les droites* AM, BM, CM *soit maximum.*

Solution par M. Bastin. Soient x, y, z les distances de M aux côtés du triangle ABC, h, k, l les hauteurs de ABC. L'aire de A'B'C' sera, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{x}{k-y} & \frac{x}{l-z} \\ \frac{y}{k-x} & 0 & \frac{y}{l-z} \\ \frac{z}{h-x} & \frac{z}{k-y} & 0 \end{vmatrix},$$

ou, si l'on tient compte de la relation

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{xyz}{lxy + kxz + hyz - xyz} = \frac{1}{\frac{h}{x} + \frac{k}{y} + \frac{l}{z} - 1}. \tag{2}$$

Le maximum de A'B'C' exige que la différentielle du dénominateur de la dernière fraction soit nulle, ou

$$\frac{h}{x^2}dx + \frac{k}{y^2}dy + \frac{l}{z^2}dz = 0, \tag{3}$$

Digitized by Google

sous la condition

$$\frac{dx}{h}+\frac{dy}{k}+\frac{dz}{l}=0, \qquad (4)$$

qui résulte de (1). Les relations (3) et (4) devant coexister pour tous les rapports qu'on peut établir entre dx, dy, dz, il faut poser

$$\frac{h}{x^2}:\frac{1}{h}=\frac{k}{y^2}:\frac{1}{k}=\frac{l}{z^2}:\frac{1}{l},$$

ou

$$\frac{x}{h}=\frac{y}{k}=\frac{z}{l}=\frac{1}{3}.$$

Donc M est le centre de gravité de ABC.

×*Autre solution.* D'après (2) et (3), la question revient à trouver le minimum de $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, lorsque la somme $\alpha+\beta+\gamma$ est constante. Or, si α et β pouvaient être inégaux, on diminuerait la somme des inverses de α, β, γ, sans altérer la somme $\alpha+\beta+\gamma$, en remplaçant α et β par $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; car $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$, et si $\alpha+\beta$ est constant, le maximum de $\alpha\beta$ a lieu pour $\alpha=\beta$.

Remarque. D'après l'égalité (2), le lieu d'un point M tel que la surface A'B'C' est constante, a pour équation

$$\frac{h}{x}+\frac{k}{y}+\frac{l}{z}=m,$$

m étant une constante. Le lieu est donc une courbe du 3me ordre, touchant en A, B, C des parallèles à BC, CA, AB, et ayant des asymptotes parallèles aux côtés de ABC. Si le triangle A'B'C' est double de ABC, le lieu de M se compose 1° de la droite de l'infini; 2° de l'ellipse circonscrite à ABC et ayant pour centre le centre de gravité de ABC (*).

(J. N.)

(*) De là ces deux théorèmes élémentaires : 1° *Si trois parallèles* AA', BB', CC', *menées par les sommets d'un triangle* ABC *rencontrent les côtés opposés en* A', B', C', *l'aire du triangle* A'B'C' *est double de l'aire* ABC. 2° *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle équilatéral* ABC *à un point quelconque de la circonférence circonscrite rencontrent les côtés opposés aux sommets d'un triangle ayant pour aire* 2ABC.

Le premier théorème vient d'être étendu au tétraèdre (Question 429); le second est-il déjà connu? (J. N.)

Digitized by Google

Solution par M. De Rocquigny. On peut toujours considérer ABC comme la projection orthogonale d'un certain triangle équilatéral *abc*. Soient *a'*, *b'*, *c'*, *m* les points du plan *abc*, qui se projettent en A', B', C', M. Le rapport des aires *a'b'c'*, A'B'C' étant constant, le maximum de de A'B'C' correspond à celui de *a'b'c'*. Le triangle *abc* ayant trois axes de symétrie, le point *m* qui correspond au maximum de *a'b'c'* est, évidemment, le centre de gravité de *abc*. Donc A'B'C' est maximum, lorsque M coïncide avec le centre de gravité de ABC.

Autres solutions par MM. Pisani et Liénard.

Question 257.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 144.)

Une infinité de circonférences se touchent en un même point O. ***On prend sur chacune d'elles, à partir de*** O, ***un arc*** OC ***de longueur constante a. On demande :*** 1° ***de trouver l'équation du lieu*** (C) ***de l'extrémité de cet arc***(*) ***et de construire la tangente;*** 2° ***de trouver l'équation de l'enveloppe*** (V) ***du rayon qui passe par l'extrémité de l'arc et de déterminer le point de contact de ce rayon;*** 3° ***de démontrer que*** (C) ***est la podaire de*** O ***par rapport à*** (V). (J. Neuberg.)

1° Soient : A le centre de l'un des cercles, r le rayon variable OA, $OC = \rho$ et $COX = \omega$, les coordonnées polaires de C, enfin $\varphi = OAC = 2\omega$ l'angle variable du rayon AC avec OA. Menant AD perpendiculaire à OC, on trouve aisément $a = r\varphi = 2r\omega$, $\rho = 2OD = 2r \sin \omega$; d'où, en éliminant r, l'équation du lieu (C), savoir :

$$\rho = \frac{a \sin \omega}{\omega}.$$

Cette courbe, que M. Falkenburg et M. le Dr Benthem (*Nieuw Archief*, X, p. 76) ont appelée *cochléoïde*, est l'inverse de la *quadratrice*. Cette dernière, comme l'on sait, est engendrée par l'intersection d'une

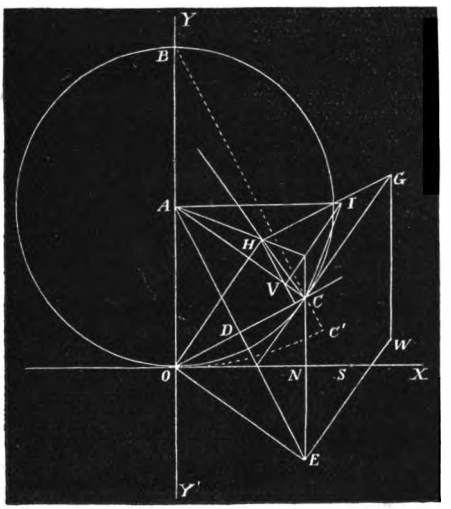
---

(*) La recherche de cette équation est déjà proposée (en 1857) dans l'excellent *Manuel des candidats à l'école polytechnique par* M. Catalan, t. I, p. 331. Voir aussi N. C. M., 1878, IV, p. 283-284. (E. Cesáro). M. Cesáro donne les deux théorèmes suivants : 1° Les tangentes en tous les points situés sur un même rayon vecteur concourent en un même point symétrique de l'origine de la cochléoïde par rapport au rayon vecteur; 2° lorsqu'un mobile parcourt une circonférence, le centre de gravité de l'arc qu'il décrit se meut sur une cochléoïde; la tangente à celle-ci est constamment dirigée vers le mobile.

Digitized by Google

droite tournant autour d'un point fixe et d'une droite se déplaçant parallèlement à elle-même, les vitesses de ces droites étant dans un rapport constant. Elle a pour équation $\rho \sin \omega = a\omega$.

Construisons le losange OACE. Le sommet E décrit une spirale hyperbolique, car ses coordonnées polaires par rapport à l'axe OY′ vérifient l'équation $r\varphi = a$. Par conséquent : *Si par un point* E *d'une spirale hyperbolique, on mène une droite* EC *égale au rayon vecteur et parallèle à l'axe polaire négatif, l'extrémité* C *de cette droite décrit une cochléoïde. La projection* D *d'un point* E *d'une spirale hyperbolique sur la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur avec l'axe polaire négatif décrit également une cochléoïde.*



Pour déterminer la tangente à (C) par la méthode de Roberval, remarquons que le point C est animé de trois vitesses dues au mouvement de A sur AO, au mouvement de C sur AC et à la rotation de AC autour de A. Représentons par AO la vitesse de A sur YY′; les deux premières vitesses de C seront représentées par CE et CA, et leur résultante par CO. La vitesse de circulation CG de C autour de A, dirigée suivant la tangente CG au cercle (A), a pour mesure $r\dfrac{d\varphi}{dt}$. Mais, de $r\varphi = a$, on tire

$$r\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi\frac{dr}{dt};$$

la vitesse de A, mesurée par $\dfrac{dr}{dt}$, a été représentée par $AO = r$; donc la vitesse de circulation de C autour de A est égale à $-\varphi r$ ou $-a$. On prendra donc $CG = a$, et la diagonale du parallélogramme OCGH sera la tangente à la cochléoïde.

On peut énoncer plus simplement ce résultat. La ligne OH, perpendiculaire à AC, est symétrique de OX par rapport à OC. L'*origine* de la

Digitized by Google

cochléoïde est un point S situé sur OX à la distance OS $= a$ du pôle ; donc *la tangente en un point* C *de la cochléoïde passe par le symétrique de l'origine* S *pour rapport au rayon* OC(*).

2° L'équation du rayon AC, qui fait avec OX l'angle $\frac{1}{2}\pi + \varphi$, est

$$y = -x\cot\varphi + r = -x\cot\varphi + \frac{a}{\varphi}. \qquad (1)$$

La dérivée de (1), par rapport à φ, est

$$\frac{x}{\sin^2\varphi} - \frac{a}{\varphi^2} = 0. \qquad (2)$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe (V), il faut éliminer φ entre (1) et (2). En tenant compte de (2), on trouve

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{a - \varphi^2 x}}{\varphi\sqrt{x}}.$$

Substituant cette valeur dans (1), résolvant l'équation résultante par rapport à φ et portant la racine dans (2), on obtient pour l'enveloppe de AC :

$$\sin\frac{ay + \sqrt{ax(x^2 + y^2 - ax)}}{x^2 + y^2} = \frac{y\sqrt{ax} + x\sqrt{x^2 + y^2 - ax}}{x^2 + y^2}.$$

Le point de contact V de AC avec son enveloppe peut se déduire de l'équation (2) ; il suffit de construire l'abscisse de V au moyen de

$$x = \frac{a\sin^2\varphi}{\varphi^2} = \frac{r^2\sin^2\varphi}{a} = \frac{\overline{ON}^2}{OS}(**).$$

On peut aussi chercher le centre instantané de rotation de la droite AC.

(*) Cette construction a été trouvée par M. Hoeckstra au moyen de l'équation de la cochléoïde. Nous engageons nos lecteurs à en faire la vérification par le calcul. Nous avions aussi proposé la question 258 dans les *Wiskundige Opgaven* d'Amsterdam, où la solution a paru en 1884 (*Tweede Deel*, 5e stuck, p. 247).

La recherche de l'enveloppe (V) nous avait été demandée par M. l'ingénieur Falkenburg, à qui nous avons communiqué, à cette occasion, les résultats (avec démonstration) de nos études sur la cochléoïde. M. Falkenburg a trouvé bon de publier dans les *Archives de Grunert-Hoppe*, t. 70, p. 259-267, les propriétés de cette courbe, sans faire mention de notre correspondance. Il résulte de là que nos rôles respectifs paraissent être intervertis. (J. N.)

(**) Deux constructions intéressantes du point V ont été données par MM. Hoeckstra et Allersma. Voir *Wiskundige Opgaven* (loc. cit.).

Digitized by Google

Si l'on considère la distance AC comme invariable, les vitesses de C seront CE et CG, et la tangente à la trajectoire de C sera la diagonale CW du parallélogramme CGWE, diagonale qui est parallèle à AH. Par conséquent, les normales aux trajectoires des points A et C sont les droites AI et CI respectivement perpendiculaires à AO et AH. I sera le centre instantané de rotation, et sa projection sur AC est le point cherché V.

3° Soient B le point diamétralement opposé à O sur le cercle (A), OC′ un arc décrit de B comme centre avec le rayon OB = 2*r*. Comme l'angle OBC = $\frac{1}{2}$OAC, les arcs OC et OC′ sont égaux; donc C′ est encore un point de la cochléoïde, et BC′ est une tangente à E. C étant la projection de O sur OC′, la cochléoïde (C) est la podaire de O par rapport à (V).

(J. Neuberg.)

Solution partielle par M. H. Brocard.

Note. Il y a deux ou trois ans que M. l'ingénieur Falkenburg a appelé de nouveau l'attention sur la cochléoïde dont M. Catalan avait donné l'équation en 1857. Dans les journaux politiques de la Hollande, on a parlé de la cochléoïde comme d'une courbe merveilleuse, au moyen de laquelle on peut 1° effectuer la quadrature du cercle; 2° diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales! Ce sont les deux problèmes que les anciens espéraient résoudre au moyen de la *quadratrice*. Malheureusement, cela suppose que l'on puisse construire la quadratrice ou la cochléoïde d'un mouvement continu.

Il est assez curieux que, dans l'antiquité, Apollonius ait donné à la *quadratrice* le nom de *sœur de la cochloïde*. La cochloïde des anciens, que l'on a cru, jusqu'à présent, identique à la conchoïde de Nicomède, serait-elle la courbe de M. Catalan et de M. Falkenburg? (P. M.)

×Question 284.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 231.)

Soient BD, CE *les bissectrices des angles* B, C *du triangle* ABC; *si les angles* A, B, C *sont proportionnels aux nombres* 1, 2, 4, *on a les relations*

$$\overline{AC}^2 = AB.AE, \quad \overline{BC}^2 = AC.CD,$$

$$AC.BC = AB.CE, \quad AB.BC = AC'.BD,$$

$$\overline{BC}^2 = BD.CE. \qquad \text{(Liénard.)}$$

Digitized by Google

Solution par MM. Falisse (Arlon), Maryssael (Ostende) Colette (Liége), Thiry, Jeřábek, Bartier, Pisani, Boedt (Ypres), Minoliti, Henrard (Arlon); et Lebrun, Delcourt, H. Gelin, Henrion, Mahy, Wéry (tous de S. Quirin, Huy). De l'hypothèse C = 2B = 4A, on déduit

$$A = ABD = DBC, \quad ABC = BCE = ACE = BDC, \quad AEC = ACB.$$

Par suite, les triangles ABC, ACE, BDC sont semblables et donnent

$$AB : AC : BD = BC : CE : DC = AC : AE : BC.$$

Ces proportions conduisent immédiatement aux quatre premières formules.

La dernière formule résulte de la multiplication des deux précédentes.

Note. M. Thiry signale la proposition plus générale que voici : *Si* B = 2A, *et que* BD *soit la bissectrice de* B, *on a*

$$\overline{BC}^2 = CD.CA \ (1); \quad AB.BC = AC.BD \ (2); \quad \overline{AC}^2 = BC(AB + BC) \ (3).$$

M. Jeřábek tire la relation (1) de ce que la circonférence ABD touche BC, les angles A et DBC étant égaux. MM. Thiry et Colette démontrent la formule (2) en remplaçant BD par son égal AD dans l'égalité $AB.BC = \overline{BD}^2 + AD.DC$. L'équation (3) est une conséquence de (2), si l'on remplace BD par AC — CD et AC.CD par $\overline{BC}^2$. Pour démontrer (2), on peut aussi partir de : aire ABC = ADB + BDC, et observer que les triangles ABC, ADB, BDC sont proportionnels aux produits des côtés qui comprennent les angles égaux ou supplémentaires A, ADB, BDC.

M. Tesch d'Amsterdam généralise la question 284 en menant, dans un triangle *quelconque* ABC, BD antiparallèle à AB par rapport à l'angle C, et CE antiparallèle à BC par rapport à l'angle A; les cinq égalités de M. Liénard ont encore lieu. (J. N.)

Si l'on fait $A = \frac{1}{7}\pi = \theta$, BC = 1, on trouve

$$\sin 4\theta = \sin 3\theta, \quad \sin 5\theta = \sin 2\theta; \quad AB = \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta}, \quad AC = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta},$$

$$AE = \frac{\sin^2 2\theta}{\sin \theta \sin 3\theta}, \quad CD = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{AC}, \quad CE = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} = \frac{1}{BD}, \quad \text{etc.}$$

(H. Brocard.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

429. Si des parallèles menées par les sommets d'un tétraèdre ABCD rencontrent les faces opposées aux points a, b, c, d, le volume du tétraèdre *abcd* est triple de celui de ABCD. (MALET, *Educational Times*.)

430. On donne sur une circonférence O deux points fixes A, B et un point mobile M. Démontrer qu'il y a deux paraboles passant par A, B et tangentes à la circonférence au point M. Trouver le point de rencontre de leurs axes, et le lieu que décrit ce point, quand M parcourt la circonférence. (BARBARIN.)

***431.** Construire un quadrilatère, connaissant les projections du point de rencontre des diagonales sur les côtés. (BARBARIN.)

432. Les milieux des côtés d'un triangle, le centre du cercle circonscrit à ce triangle, un sommet et l'intersection du côté opposé avec la tangente en ce point au cercle circonscrit se trouvent sur une même hyperbole équilatère. (H. BROCARD.)

433. D'une parabole variable, on donne la tangente au sommet et un point M; chercher le lieu du foyer et le lieu du centre du cercle osculateur au point M. (FARISANO.)

434. Trouver le lieu des points de vue qui donnent pour perspective sur un plan fixe, d'un segment de droite fixe de longueur donnée, un autre segment de longueur constante. Transformer le mode de génération, de manière à mettre en évidence les sections circulaires. (L. LARRIVET.)

435. Soient DM, DM′ deux droites rectangulaires, tangentes à une ellipse, aux points M,M′. Chercher le maximum et le minimum des longueurs DM, DM′, et déterminer les normales communes à l'ellipse et à sa développée. (H. BROCARD.)

436. On donne dans un plan horizontal, deux tiges sur lesquelles roule une surface de révolution dont la courbe méridienne admet deux axes de symétrie, et dont l'équateur reste dans le plan vertical de la bissectrice de l'angle que forment les tiges. Le lieu du centre de la surface mobile est une courbe de même nature que la méridienne.

Définir cette courbe lorsque la surface de révolution est un cône (le double cône des expériences de physique), une sphère, ou un ellipsoïde. (H. BROCARD.)

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

Théorèmes sur la parabole,

par M. C. Bergmans; professeur à l'athénée royal de Gand.

(*Suite;* voir pages 71-72.)

XI. Si d'un point A pris hors de la parabole on mène deux tangentes AN, AN′ à la parabole, la distance FA du foyer F au point A est une moyenne proportionnelle entre les distances FN, FN′ du foyer aux deux points de contact.

Soient I et I′ les points d'intersection de AN et AN′ avec la tangente II′O au sommet O; α et α' les angles de AN et AN′ avec l'axe de la parabole. On a $OI = \frac{1}{2}p \cot\alpha$, $OI' = \frac{1}{2}p \cot\alpha'$; donc $II' = \frac{1}{2}p(\cot\alpha' - \cot\alpha) = \frac{1}{2}p \sin(\alpha - \alpha') : \sin\alpha \sin\alpha'$, ou encore $\frac{1}{2}p : \sin\alpha \sin\alpha' = II' : \sin(\alpha - \alpha')$. Ce dernier rapport est égal à $AI : \sin II'A = AI : \cos\alpha' = AI : \cos II'F = AI : \cos IAF = AF$. (L'égalité des angles II′F, IAF résulte de ce que II′AF est un quadrilatère inscriptible). On a donc $AF = \frac{1}{2}p : \sin\alpha \sin\alpha'$, égalité d'où résultent immédiatement le théorème XI et beaucoup d'autres.

XII. Si un triangle AA′A″ est circonscrit à la parabole, et si l'on désigne par B, B′, B″ les points où la parabole touche respectivement les côtés A′A″, AA″, AA′, on a la relation

$$AB' \times A''B \times A'B'' = AB'' \times A'B \times A''B'$$

Généralisation de la proposition analogue pour un triangle coupé par une transversale.

XIII. Si par un point A, pris hors de la parabole, on mène deux tangentes à la courbe qui la touchent en B′ et B″, puis une troisième tangente qui la touche en un point B et qui rencontre en B_1 la polaire du point A, les deux tangentes AB′, AB″, la sécante AB et la droite AB_1 forment un faisceau harmonique.

On combine la relation énoncée dans le théorème précédent, avec celle que donne le théorème sur les transversales :

$$AB''.A'B_1.A''B' = AB'.A''B_1.A'B''.$$

XIV. Soit B′BB″ un triangle inscrit dans le parabole; menez une droite quelconque DE parallèle à la tangente en B : ce point B, le pôle A du côté B′B″, et le point milieu de la portion de DE comprise entre les côtés BB′ et BB″ sont en ligne droite.

On déduit aisément XIV de XIII par les propriétés de la division harmonique.

Digitized by Google

XV. Un triangle étant circonscrit à la parabole, si l'on prolonge les cordes des points de contact jusqu'à leur intersection avec les côtés du triangle, on obtient trois points qui sont sur une même ligne droite.

XVI. Si un triangle est circonscrit à la parabole, et si l'on joint successivement chaque sommet au point de contact du côté opposé, les trois droites qu'on obtient ainsi se coupent en un même point.

XVII. Si, par un point de la directrice, on mène une tangente AN à la parabole, puis une parallèle à l'axe qui rencontre la courbe en M et en N′ la normale menée par N, la distance $MN' = 3\,AM$.

Ce théorème et les suivants jusqu'à XXII se démontrent très simplement, d'une manière élémentaire et directe.

XVIII. Si, par un point M de la parabole, on mène la tangente qui rencontre l'axe en A et la normale qui rencontre l'axe en B : le foyer est le centre de la circonférence passant par les 3 points A, B, M.

XIX. Si, par un point de la parabole, on mène la tangente, la normale et le rayon vecteur au foyer : la somme des carrés de la tangente et de la normale vaut quatre fois le carré du rayon vecteur.

XX. Par un point de la directrice, on mène une tangente, puis une parallèle à l'axe jusqu'au rayon vecteur du point de contact de la tangente : la parabole divise cette parallèle en deux parties égales.

XXI. Si, en un point N de la parabole, on mène une normale : la distance du foyer à cette normale est une moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur qui joint le foyer au point N et l'abscisse du point N.

XXII. En un point N de la parabole, on mène une normale NN′ et deux obliques ND, NE également inclinées sur la normale. Si ces trois droites rencontrent l'axe de la parabole respectivement en N′, D, E, la distance du foyer F au point N ou N′, c'est-à-dire FN ou FN′, est une moyenne proportionnelle entre FD et FE.

XXIII. Un triangle inscrit est tel qu'une des bissectrices intérieures est normale à la courbe : le côté opposé à l'angle dont la bissectrice est normale, passe par le pôle de la normale.

On peut encore utiliser la division harmonique.

XXIV. Une parabole rencontrant les côtés AB, BC, CD, ... LA d'un polygone aux points (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) ... (l, λ), on a

$$A\alpha.\ A\alpha.\ B\beta.\ B\beta.\ C\gamma.\ C\gamma.\ \ldots\ L\lambda.\ L\lambda = Ba.\ B\alpha.\ Cb.\ C\beta.\ Dc.\ D\gamma.\ \ldots\ Al.\ A\lambda.$$

Ce cas particulier du théorème général de Carnot peut se déduire du Th. I.

Digitized by Google

SUR LE SECOND THÉORÈME DE LA MOYENNE,

par M. P. MANSION, avec un Extrait d'une lettre de M. L. KRONECKER, professeur à l'Université de Berlin (*).

I.

Le second théorème de la moyenne est souvent appelé en Allemagne *Du Bois-Reymond's Mittelwerthsatz*, parce que ce géomètre, qui en fait grand usage dans ses recherches sur les séries et les intégrales de Fourier, l'a publié (**) et démontré, le premier, dans toute sa généralité. Il peut s'énoncer ainsi, dans le cas des fonctions habituellement considérées en analyse élémentaire : « *Si* Fx *est une fonction non croissante (c'est-à-dire constante ou décroissante) depuis* x_0 *jusqu'à* X, *on a*, moyennant certaines conditions sur lesquelles nous reviendrons plus bas,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\,dx + FX \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\,dx, \qquad (1)$$

x_μ étant une valeur convenablement choisie entre x_0 et X. »

Voici, dans le cas des fonctions élémentaires, une démonstration de ce théorème (***). On a

$$V = \int_{x_0}^{X} (Fx - Fx_0)\,\varphi x\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx \int_{x_0}^{x} F'y\,dy$$

V étant le volume compris entre la surface qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires, $z = \varphi x\, F'y$, le plan des xy, et les trois plans représentés par $x = x_0$, $y = x_0$, $y = x$.

(*) Bibliographie : OSSIAN BONNET, *Journal de Lionville*, 1849, t. XIV, pp. 249 et suivantes; P. DU BOYS-REYMOND, *Journal de Borchardt*, 1868, t. LXIX, pp. 65 et suivantes; HANKEL, *Journal de Schlömilch*, 1869, t. XIV pp. 436 et suivantes; G. F. MEYER, *Mathematische Annalen*, 1873, t. VI, pp. 313-318; puis divers manuels d'analyse infinitésimale, celui de M. Jordan, par exemple, t. II, pp. 89-91, où la démonstration est analogue à celle de M. Kronecker, mais sans les remarques du § II, 3.

(**) Par l'impression, bien entendu; car M. Weierstrass, comme le fait remarquer M. du Bois-Reymond, connaissait le second théorème de la moyenne et l'avait communiqué à ses auditeurs de l'Université de Berlin, avant 1869.

(***) Traduction géométrique de l'une des démonstrations données par M. P. du Bois-Reymond, *Journal de Borchardt*, l. c., p. 82.

Digitized by Google

On peut exprimer V par une intégrale double où la première intégration se fait par rapport à x, la seconde par rapport à y. On trouve ainsi :

$$V = \int_{x_0}^{X} F'y\, dy \int_{y}^{X} \varphi x\, dx. \qquad (2)$$

L'expression $F'y$ étant la dérivée d'une fonction constante ou décroissante, est toujours négative ou nulle. Donc la dernière intégrale est égale à

$$\int_{x_0}^{X} \mu F'y\, dy = \mu (FX - Fx_0),$$

μ désignant une valeur intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de

$$\int_{y}^{X} \varphi x\, dx,$$

lorsque y varie depuis x_0 jusqu'à X. Cette valeur moyenne peut, en général, être représentée par

$$\int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx,$$

x_μ étant une valeur de x convenablement choisie. On a donc enfin

$$\int_{x_0}^{X} (Fx - Fx_0)\, \varphi x\, dx = (FX - Fx_0) \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx,$$

ou, après quelques transformations évidentes,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\, \varphi x\, dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\, dx + FX \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx.$$

Les conditions d'existence de cette formule sont celles qui suffisent pour la légitimité des opérations qui y ont conduit.

Remarques I. Si x_ν est une valeur de x comprise entre x_μ et X et telle que

$$FX \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\, dx = Fx_0 \int_{x_\mu}^{x_\nu} \varphi x\, dx,$$

le second théorème de la moyenne devient

$$\int_{x_0}^{X} Fx\, \varphi x\, dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi x\, dx. \qquad (3)$$

Digitized by Google

II. M. P. du Bois-Reymond a fait remarquer(*) que le théorème de la moyenne sous la forme (1) peut se déduire de la formule (3), en remplaçant Fx, par $fx - fX$, fx étant une fonction non croissante.

II.

Ayant communiqué la précédente démonstration à M. L. KRONECKER, l'éminent professeur attira notre attention sur la suivante, où il utilise, *d'une manière complète*, la célèbre méthode de transformation des séries, due à Abel(**), en l'appliquant aux intégrales.

1. Par définition

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = \lim_{n=\infty} S_n,$$

si

$$S_n = (x_2 - x_0)Fx_1\varphi x_1 + (x_4 - x_2)Fx_3\varphi x_3 + \cdots + (X - x_{2n-2})Fx_{2n-1}\varphi x_{2n-1},$$

$x_2 - x_0, x_4 - x_2, \ldots, X - x_{2n-2}$ étant n subdivisions égales ou inégales de $X - x_0$, tendant vers zéro avec n^{-1}, x_{2k-1} désignant l'une des valeurs de x, de x_{2k-2} à x_{2k}.

Posons

$$s_k = (x_2 - x_0)\,\varphi x_1 + (x_4 - x_2)\,\varphi x_3 + \cdots + (x_{2k} - x_{2k-2})\,\varphi x_{2k-1},$$

de sorte que

$$(x_{2k} - x_{2k-2})\,\varphi x_{2k-1} = s_k - s_{k-1}.$$

On aura, par la transformation d'Abel,

$$S_n = s_1 Fx_1 + (s_2 - s_1)\,Fx_3 + (s_3 - s_2)\,Fx_5 + \cdots + (s_n - s_{n-1})\,Fx_{2n-1}$$
$$= [s_1(Fx_1 - Fx_3) + s_2(Fx_3 - Fx_5) + \cdots + s_{n-1}(Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1})] + s_n Fx_{2n-1},$$

et, à la limite,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = \lim\,[s_1(Fx_1 - Fx_3) + s_2(Fx_3 - Fx_5) + \cdots$$
$$+ s_{n-1}(Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1})] + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx. \qquad (4)$$

(*) *Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen; eine Entgegnung.* Tubingen, 1880, p. 59-60.

(**) *Œuvres complètes*, nouvelle édition, 1881, t. I, p. 222. M. Ossian Bonnet n'a utilisé cette transformation que d'une manière incomplète.

Digitized by Google

Soient m, M deux quantités, l'une plus petite, l'autre plus grande, entre lesquelles les sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ sont toujours comprises. On aura

$$s_1(Fx_1 - Fx_3) + s_2(Fx_3 - Fx_5) + \cdots + s_{n-1}(Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1}) > m[(Fx_1 - Fx_3) + (Fx_3 - Fx_5) + \cdots + (Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1})]$$

ou

$$m(Fx_1 - Fx_{2n-1}),$$

et

$$s_1(Fx_1 - Fx_3) + s_2(Fx_3 - Fx_5) + \cdots + s_{n-1}(Fx_{2n-3} - Fx_{2n-1}) < M(Fx_1 - Fx_{2n-1}).$$

Donc enfin, en faisant $x_1 = x_0$, $x_{2n-1} = X$,

$$m(Fx_0 - FX) + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx < \int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx$$

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx < M(Fx_0 - FX) + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx. \qquad (5)$$

Ces inégalités ne reposent que sur trois hypothèses, l'une relative à Fx, savoir qu'elle n'est pas croissante de x_0 à X, l'autre relative aux s, qui sont supposés finis; enfin, on admet l'existence des intégrales considérées.

2. Supposons maintenant, de plus, que m_0, M_0 soient les valeurs minima et maxima, et réellement atteintes par l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi x\,dx$ lorsque x varie de x_0 à X. Il pourra arriver qu'il existe une valeur x_μ bien déterminée, telle que

$$(Fx_0 - FX)\int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\,dx$$

soit précisément égale à la valeur de

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx - FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx,$$

comprise entre $m_0(Fx_0 - FX)$ et $M_0(Fx_0 - FX)$. Dans ce cas, on pourra écrire

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx - FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx = (Fx_0 - FX)\int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\,dx,$$

Digitized by Google

ou, comme dans le § I,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = Fx_0 \int_{x_0}^{x_\mu} \varphi x\,dx + Fx \int_{x_\mu}^{X} \varphi x\,dx.$$

3. Mais il importe d'ajouter quelques remarques relativement à ces nouvelles hypothèses, savoir l'existence du minimum m_0 et du maximum M_0 et celle de la valeur x_μ.

L'analyse précédente du n° 1, donne le théorème de la moyenne sous forme d'inégalités. Pour en tirer le théorème sous forme d'une égalité, il faut y introduire, comme on l'a vu plus haut au n° 2, une certaine *valeur moyenne* x_μ dont la définition exige plus qu'il n'est nécessaire pour établir ces inégalités. Cependant ces inégalités, qui découlent immédiatement de la transformation d'Abel, *suffisent* pour toutes les applications. On n'a peut-être pas fait assez attention à ces distinctions que nous venons de faire relativement au théorème de M. du Bois-Raymond.

III.

Ajoutons à ces précieuses observations de M. Kronecker, deux remarques, l'une sur la démonstration du § I comparée à celle du § II, l'autre sur les inégalités dues à M. Ossian Bonnet.

I. Dans le cas des fonctions élémentaires considérées au § I, la formule (4) donne immédiatement la formule (2), en observant que

$$s_k = \int_{x_0}^{x_{2k}} \varphi x dx + \varepsilon, \quad Fx_{2k-1} - Fx_{2k+1} = (x_{2k-1} - x_{2k+1})\,F'(x_{2k} + \varepsilon')$$

ε et ε' étant aussi petits que l'on veut. On trouve, en effet, dans cette hypothèse,

$$\int_{x_0}^{X} Fx\,\varphi x\,dx = -\int_{x_0}^{X} F'y\,dy \int_{x_0}^{y} \varphi x\,dx + FX \int_{x_0}^{X} \varphi x\,dx,$$

relation qu'il est aisé de transformer dans la formule (2).

Mais, en passant ainsi des sommes aux intégrales *avant* d'avoir enfermé l'expression étudiée entre deux limites, on voit que l'on est forcé de supposer l'existence de la dérivée $F'y$, ce qui n'a pas lieu dans la démonstration du § II, où l'on passe des intégrales aux sommes *après* avoir assigné des limites à S_n.

Digitized by Google

II. Évidemment, si FX est positif,

$$mFx_0 < m(Fx_0 - FX) + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\, dx,$$

$$MFx_0 > M(Fx_0 - FX) + FX\int_{x_0}^{X} \varphi x\, dx;$$

donc, d'après (5)

$$mFx_0 < \int_{x_0}^{X} Fx\, \varphi x\, dx < MFx_0, \qquad (6)$$

inégalités que l'on renverserait si FX est négatif. M. Ossian Bonnet a eu le mérite de les signaler, le premier, dès 1849, comme une conséquence de la transformation d'Abel appliquée aux intégrales. La démonstration donnée par M. Kronecker prouve que l'on peut déduire de cette transformation des limites plus rapprochées.

Des inégalités (6), on peut déduire l'égalité (3), moyennant les hypothèses qui permettent de tirer (1) de (5); mais de (6) il ne semble pas que l'on puisse tirer (5) par une remarque analogue à celle qui termine le paragraphe premier.

UNE ÉQUIVALENCE ALGÉBRIQUE.

Extrait d'une lettre de M. L. Kronecker.

Dans la nouvelle algèbre, dont M. Kronecker a posé les fondements dans ses *Grundzüge einer arithmetischen Theorie des algebraischen Grössen* (Berlin, Reimer, 1882), le problème fondamental à résoudre consiste à représenter toute fonction entière de x, sous forme d'un produit de facteurs linéaires, sans définir préalablement les grandeurs algébriques. L'éminent professeur y est parvenu, de la manière la plus simple et la plus complète, dans les leçons qu'il a faites à l'Université de Berlin, pendant le dernier semestre. Voici, par exemple, d'après une lettre de M. Kronecker, l'équivalence algébrique qui remplace la considération de $\sqrt[3]{2}$:

$$x^3 - 2 = (x - \tfrac{1}{18} z^4)\,(x + \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{36} z^4)\,(x - \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{36} z^4),$$

a un multiple près de $z^6 + 108$.

M. Kronecker va publier les considérations générales dont il a déduit cet exemple. (P. M.)

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS DIVERSES DU CERCLE ET DE LA DROITE DE BROCARD;

par E. LEMOINE, ancien élève de l'école polytechnique.

Soient ABC le triangle fondamental, MNP le triangle que forment les tangentes menées en A, B, C au cercle circonscrit O. Une droite quelconque parallèle à NP et limitée aux côtés de l'angle BAC sera dite une *antiparallèle* de BC. Toutes les antiparallèles de BC ont leurs milieux sur la droite AM, que, pour cette raison, nous avions proposée d'appeler *médiane antiparallèle* (*); nous adopterons maintenant l'expression plus courte de *symédiane*, qui est due à M. d'Ocagne. Les trois symédianes AM, BN, CP se coupent en un même point K(**) dont les distances aux côtés de ABC sont proportionnelles à ces côtés.

La droite KO a pour équation

$$x \sin(B - C) + y \sin(C - A) + z \sin(A - B) = 0,$$

ou

$$bc(b^2 - c^2)x + ca(c^2 - a^2)y + ab(a^2 - b^2)z = 0.$$

Soient A_1, B_1, C_1 les projections de K sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de ABC; ces points sont les sommets du *triangle de Brocard* $A_1B_1C_1$. Les triangles isoscèles BCA_1, CAB_1, ABC_1 sont semblables. L'angle à la base est *l'angle de Brocard* que nous désignerons par α; on a

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}.$$

Les droites AC_1, BA_1, CB_1 se coupent au *premier point de Brocard* ω dont les coordonnées homogènes sont $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$; les droites AB_1, BC_1, CA_1 se coupent au *deuxième point de Brocard* ω', ayant pour coordonnées $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$. La droite $\omega\omega'$, qui est perpendiculaire à KO et a son milieu sur cette ligne, a reçu le nom de *droite de Brocard*. Son équation est

$$(a^4 - b^2c^2)\frac{x}{a} + (b^4 - c^2a^2)\frac{y}{b} + (c^4 - a^2b^2)\frac{z}{c} = 0.$$

Les sept points K, O, A_1, B_1, C_1, ω, ω' sont sur un même cercle (*cercle de Brocard*), qui a pour équation (***)

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - abc(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

(*) *Association française pour l'avancement des sciences*, (Congrès de Lyon et de Lille, 1873 et 1874) et N. A. M., 1873 (2) XII, p. 364.

(**) *Centre des médianes antiparallèles* ou, d'après l'expression proposée par M. Neuberg (Mémoire sur le tétraèdre) et adoptée par quelques géomètres, *point de Lemoine*. Voir aussi, *Mathesis*, p. 201.

(***) Toutes ces équations sont dues à M. Tucker (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. XIX, n° 76).

Digitized by Google

Les coordonnées du centre de ce cercle (milieu de KO) et le diamètre ont pour valeurs

$$\tfrac{1}{4}R(\sin A \operatorname{tg}\alpha + \cos A), \text{ etc.}, \quad KO = R\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Au moyen de ces propriétés et de ces équations que nous avons cru utile de rappeler, le lecteur trouvera facilement la démonstration des nouveaux théorèmes que nous allons énoncer.

1. La droite de Brocard ne peut contenir un des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle sans se confondre avec une bissectrice intérieure de ce triangle.

Elle ne peut être parallèle à une bissectrice extérieure sans que le triangle soit isoscèle, ni être parallèle à une bissectrice intérieure sans se confondre avec elle.

Ces propositions s'appliquent aussi à la droite qui joint deux points quelconques réciproques(*) par rapport au triangle.

2. Si la droite de Brocard est perpendiculaire à une symédiane, ou si elle est parallèle à une antiparallèle, le triangle est isoscèle, et réciproquement.

3. Si la droite de Brocard est parallèle à la symédiane partant de C, on a

$$c^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2);$$

de plus le cercle de Brocard touche cette symédiane au point de Lemoine, et réciproquement.

4. Si la droite de Brocard est parallèle à la médiane partant de C, on a

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

et réciproquement.

5. Si la droite de Brocard est perpendiculaire à l'antiparallèle de AB, on a

$$a^2 + b^2 - 2c^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{c}\right)^2,$$

et réciproquement.

6. Si la droite de Brocard est perpendiculaire à la médiane partant de C, on a

$$ab + c^2 \cos C = 0,$$

et réciproquement.

(*) Points réciproques (ou *arguesiens*) dans le sens défini, *Mathesis*, t. I, p. 154.

Digitized by Google

7. Si la droite de Brocard est perpendiculaire au côté BC (ou si KO est parallèle à BC) :

1° $b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2)$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi - A$;

2° Le premier point de Brocard est sur la hauteur partant de B, l'autre sur la hauteur partant de C;

3° La médiane partant de C et la hauteur partant de B se coupent sur la symédiane AM, de même que la médiane partant de B et la hauteur partant de C.

4° Le centre du cercle de Brocard est sur la médiane partant de A.

8. Jamais un point de Brocard ne peut être un point de concours des hauteurs, sauf dans le cas du triangle équilatéral.

9. Jamais l'angle de Brocard ne peut être égal à l'un des angles du triangle.

Si cet angle est le tiers de A, l'on a

$$b^2c^2(b^2 + c^2) = a^6 - 2a^2b^2c^2.$$

10. Les puissances de A,B,C par rapport au cercle de Brocard sont

$$\frac{b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \frac{c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Elles sont inversement proportionnelles aux carrés des côtés opposés; par suite, on peut construire avec la règle et le compas le triangle ABC si l'on connaît ces puissances.

11. Soit, pour abréger,

$$2p = a + b + c, \quad m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad n^4 = b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2;$$

et désignons par α_1, α'_1, les points où les droites Aω, Aω', rencontrent le côté opposé BC, etc. Les distances de ω, ω' aux côtés de ABC auront pour expression

$$(\omega) \ \ldots \ x = \frac{2Sc^2a}{n^4}, \quad y = \frac{2Sa^2b}{n^4}, \quad z = \frac{2Sb^2c}{n^4};$$

$$(\omega') \ \ldots \ x' = \frac{2Sb^2a}{n^4}, \quad y' = \frac{2Sc^2b}{n^4}, \quad z' = \frac{2Sa^2c}{n^4}.$$

Par conséquent : 1° $xyz = x'y'z'$; 2° on ne peut avoir $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ que si le triangle est isoscèle.

On trouve facilement :

$$\sin\alpha = \frac{2S}{n^2}, \quad \cos\alpha = \frac{m^2}{2n^2},$$

Digitized by Google

$$\omega A = \frac{b^2 c}{n^2}, \quad \omega B = \frac{c^2 a}{n^2}, \quad \omega C = \frac{a^2 b}{n^2}, \tag{1}$$

$$\omega' A = \frac{c^2 b}{n^2}, \quad \omega' B = \frac{a^2 c}{n^2}, \quad \omega' C = \frac{b^2 a}{n^2}; \tag{2}$$

$$A\alpha_1 = \frac{n^2 c}{c^2 + a^2}, \quad A\alpha_1' = \frac{n^2 b}{b^2 + a^2}, \quad \text{etc.} \tag{3}$$

Les formules (1) et (2) donnent les rapports $\omega A : \omega B$, etc.; ce qui fournit par des cercles, lieux géométriques des points dont le rapport des distances à deux sommets est constant, une nouvelle détermination des points ω, ω'. De ces égalités, on conclut aussi que

$$\omega A . \sin A + \omega B . \sin B + \omega C . \sin C = \omega' A \sin A + \cdots = 2p \sin \alpha.$$

Enfin, des égalités (3) on déduit la condition pour que l'un des triangles $AB\alpha_1'$ ou $AB\alpha_1$ soit isoscèle. On trouve, respectivement,

$$b^4 = a^2 (b^2 + c^2), \quad b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2}.$$

12. Les droites $\alpha_1\beta_1'$, $\alpha_1'\beta_1$ qui joignent les pieds des droites $A\omega$, $A\omega'$ $B\omega$, $B\omega'$, sont tangentes à la parabole qui touche CA en A et CB en B.

13. Si les points de Brocard et deux sommets du triangle se trouvent sur une même circonférence, le triangle est isoscèle.

14. On sait que les points de Brocard sont les foyers d'une ellipse touchant les côtés de ABC aux pieds des symédianes (*Mathesis*, t. I, p. 176). L'équation de cette conique est

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 0.$$

Les longueurs des axes sont

$$\frac{abc}{n^2}, \quad \frac{a^2 b^2 c^2}{\mathrm{R} n^4}.$$

15. Le centre du cercle de Brocard n'est jamais sur une bissectrice, sauf pour la bissectrice intérieure quand le triangle est isoscèle.

Ce centre n'est jamais sur une symédiane ni sur une hauteur, excepté lorsque ces droites se confondent, c'est à dire lorsque le triangle est rectangle ou isoscèle.

16. Le cercle de Brocard n'est jamais tangent à une médiane ni à

Digitized by Google

une bissectrice intérieure. Il est tangent à la bissectrice extérieure de C si l'on a

$$2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)^2}{c^2}.$$

17. Si l'on a $a^2 = 2bc$, le cercle de Brocard est tangent au côté BC au pied de la bissectrice correspondante, et réciproquement.

18. Dans toutes les études se rapportant aux points de Brocard, les cas particuliers les plus remarquables se rencontrent lorsque un côté du triangle est moyen proportionnel entre les deux autres. Ce triangle semble donc mériter une mention spéciale, comme le triangle isoscèle et le triangle rectangle. Si l'on a $c^2 = ab$,

1° La droite de Brocard se confond avec la bissectrice de C;

2° Les points ω, ω' se confondent avec les sommets A_1, B_1 du triangle de Brocard;

3° Le cercle de Brocard touche $A\omega$ en ω, $B\omega'$ en ω';

4° La médiane partant de A et la symédiane partant de B, ainsi que la médiane partant de B et la symédiane partant de A se coupent sur la bissectrice de l'angle C.

19. La conique circonscrite au triangle ABC et qui passe par les points de Brocard est une hyperbole qui n'est jamais équilatère; elle a pour équation

$$\frac{c^2b^2 - a^4}{ax} + \frac{a^2c^2 - b^4}{by} + \frac{a^2b^2 - c^4}{cz} = 0.$$

Elle ne contient jamais par conséquent le point de concours des hauteurs ni, non plus, le centre de gravité, ni le centre du cercle inscrit, ni celui d'un cercle exinscrit. Elle ne passe par le point de Lemoine que dans le cas où un côté du triangle est moyen proportionnel entre les deux autres; alors elle se compose d'un côté de ABC et de la bissectrice de l'angle opposé (n° 18).

20. L'étude des lignes remarquables du triangle nous a conduit à quelques autres résultats qui présentent un certain intérêt.

1° Si la distance de C à la hauteur partant de B égale la distance de B à la hauteur partant de A, la médiane partant de B et la hauteur partant de A se coupent sur la bissectrice intérieure de C lorsque $B < 90^0$, et sur la bissectrice extérieure de C lorsque $B > 90^0$.

2° Si la distance de B à la hauteur partant de C égale la distance de

Digitized by Google

B au diamètre du cercle circonscrit passant par A, la hauteur partant de A et la symédiane partant de B se coupent sur la bissectrice intérieure de C lorsque $B < 90^0$ et sur la bissectrice extérieure lorsque $B > 90^0$.

3° Si l'on a : $b^2 + c^2 = a(b + c)$, relation équivalente à $(p - a)^2 = (p - b)(p - c)$ et à $r_a^2 = r_b r_c$, la ligne qui joint C au point de contact de AB avec le cercle exinscrit I_a et la ligne qui joint B au point de contact de AC avec le cercle inscrit se coupent sur la médiane partant de A, ainsi que la ligne qui joint B au point de contact de AC avec le cercle exinscrit I_b et la ligne qui joint C au point de contact de AB avec le cercle inscrit.

VARIÉTÉS.

Quelques définitions mathématiques,

d'après le *Dictionnaire de l'Académie française.*

On peut trouver, dans le *Dictionnaire de l'Académie française* (6e et 7e édition), des termes assez usuels en Mathématiques, dont la définition offre certaines singularités. Nous croyons devoir en signaler quelques-unes à la curiosité de nos lecteurs.

« *Mathématiques pures*, celles qui considèrent les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite; et *Mathématiques mixtes*, celles qui les considèrent dans certains corps ou sujets particuliers. *La géométrie, l'algèbre, etc., appartiennent aux mathématiques pures; l'astronomie, la mécanique, font partie des mathématiques mixtes.* »

Cette dernière désignation nous semble tombée en désuétude; on lui a préféré, avec raison, le terme de *mathématiques appliquées.*

« *Calcul intégral.* Le calcul par lequel on remonte des incréments (*) infiniment petits aux quantités finies dont ils dérivent. On dit substantivement, *l'intégrale d'une quantité différentielle*, la quantité finie dont cette différentielle est l'incrément (**) infiniment petit. »

Le terme archaïque d'*Incrément* ne se trouve pas au Dictionnaire.

« *Infini*, se dit substantivement, et presque toujours absolument, de ce que l'on suppose sans limites. *L'homme ne peut bien concevoir l'infini. Le calcul de l'infini. La géométrie de l'infini.* »

« *Géométrie transcendante.* Celle qui emploie l'infini dans ses calculs. »

Voilà deux définitions qui ne semblent guère s'accorder l'une avec l'autre, et que les précédentes explications ne rendent pas plus claires.

Si nous passons des généralités à des termes plus spéciaux, nous rencontrons, à

(*) Mot supprimé dans la septième édition.

(**) Remplacé par *accroissement* dans la septième édition.

Digitized by Google

côté de définitions exactes, un beaucoup plus grand nombre d'autres qui manquent de rigueur et de précision, et qui laissent du doute dans l'esprit. Le lecteur en jugera sur quelques exemples.

« *Tangente.* Ligne droite qui touche une courbe en quelqu'un de ses points, sans la couper dans ce point là! »

« *Asymptote.* Ligne droite qui, indéfiniment prolongée, s'approche continuellement d'une courbe, sans pouvoir jamais la couper. *Les asymptotes de l'hyperbole.* »

« *Asymptotique.* Qui appartient ou qui a rapport à l'asymptote. *Point asymptotique. Courbe asymptotique.* »

« *Logarithmique.* Qui a rapport aux logarithmes, qui est de la nature des logarithmes. *Courbe, spirale logarithmique.* Il se prend aussi substantivement; alors il est du féminin : *La logarithmique est une courbe asymptotique.* »

« *Conoïde.* Corps ou solide qui tient de la figure du cône »

« *Cylindre.* Corps de figure longue et ronde et d'égale grosseur partout. »

« *Ellipsoïde.* Solide engendré par la révolution de la moitié d'une ellipse autour de l'un ou de l'autre de ses axes. »

« *Aire,* en termes de Géométrie, l'espace superficiel embrassé par une figure plane rentrante sur elle-même(*) ».

« *Cycloïde.* Ligne courbe que décrit un point de la circonférence d'un cercle qui marche en roulant sur un plan. »

Voilà une définition qui, comme celle du *cylindre* et du *conoïde,* n'a pas demandé grand effort d'imagination à son inventeur.

Au mot *paramètre,* plus exactement défini, l'on trouve, comme exemple : « *Le paramètre d'une ellipse est la troisième proportionnelle au grand axe et au petit.* » Cette définition serait avantageusement complétée par celle de *troisième proportionnelle,* qui n'est donnée à aucun de ces deux mots.

« *Parabole.* Ligne courbe qui résulte de la section d'un cône quand il est coupé par un plan parallèle à un de ses côtés. »

Il vaudrait mieux dire : à un de ses plans tangents; et encore on oublie de spécifier la nature du cône.

« *Parallélogramme.* Figure plane dont les côtés opposés sont parallèles(**). »

A ce compte-là, tous les polygones réguliers d'un nombre pair de côtés seraient des parallélogrammes.

Enfin, simple détail, l'Académie écrit *Isocèle.* Il paraît plus correct d'écrire *Isoscèle.*

Ces exemples, qu'il nous serait facile de multiplier, suffiraient probablement pour justifier notre assertion.

Il est bien évident qu'il ne faut pas demander, à un ouvrage essentiellement

---

(*) La superficie qu'embrasse une figure rectiligne, curviligne ou mixte (7e édition).

(**) Quadrilatère dont les côtés opposés sont égaux et parallèles (7e édition).

Digitized by Google

littéraire, et destiné avant tout à fixer la langue française, la définition exacte et irréprochable de tous les termes spéciaux en usage des différentes sciences ; les dictionnaires encyclopédiques sont parfois insuffisants pour cet objet. L'on peut donc admettre des imperfections de détail; mais la vérité est que le lecteur se trouve assez désappointé de rencontrer, dans un recueil aussi justement estimé que le *Dictionnaire de l'Académie française*, des définitions que les académiciens eux-mêmes seront tout étonnés de voir placées sous leur patronage.

Dr CHARBONIER.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 314.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 71).

On joint un point quelconque M *d'une circonférence au centre* O *et à un point fixe* A. *Trouver l'aire de la courbe décrite par le point d'intersection* P *du rayon* OM *et de la perpendiculaire élevée par* A *sur* AM.

(JEŘÁBEK.)

Solution par MM. BOUBALS, *professeur à l'école régimentaire du Génie à Montpellier, et* J. GILLET, *étudiant à Liège.* Posons

$$OM = r, \quad OA = a, \quad OP = \rho, \quad POA = \omega.$$

Les triangles PAM, POA, MOA donnent

$$(r - \rho)^2 = \overline{AM}^2 + \overline{PA}^2,$$

$$\overline{AM}^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\omega, \quad \overline{PA}^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\omega;$$

d'où l'équation du lieu

$$\rho = a\frac{r\cos\omega - a}{r - a\cos\omega}. \tag{1}$$

Premier cas : $a < r$. Le dénominateur de la formule (1) est toujours positif; le numérateur s'annule pour une valeur $\omega = \alpha$ comprise entre O et $\frac{1}{2}\pi$, et définie par $\cos\alpha = (a : r)$. Menons la corde TT_1 perpendiculaire à OA au point A ; nous aurons $TOA = \alpha$.

Si ω croît de O à α, ρ décroît de a à O, et P décrit un arc APO tangent à AT et OT.

Entre $\omega = \alpha$ et $\omega = \pi$, ρ est négatif, et l'on obtient l'arc OQA.

Les valeurs de ω comprises entre π et 2π donnent une courbe AQ_1OP_1 symétrique de AQOP par rapport à OA.

Digitized by Google

Les limites d'intégration étant convenablement choisies, on a, pour l'aire A engendrée par le rayon vecteur ρ,

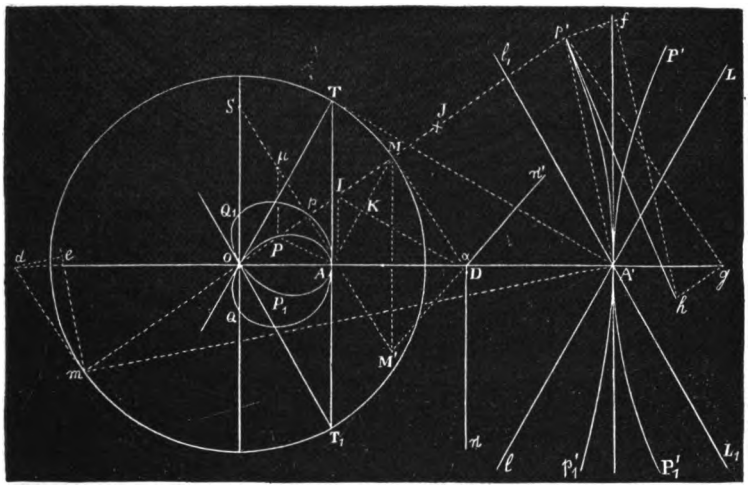
$$2A = \int \rho^2 \, d\omega = a^2 \int \left(\frac{r \cos \omega - a}{r - a \cos \omega} \right)^2 d\omega.$$

Or

$$\frac{r \cos \omega - a}{r - a \cos \omega} = -\frac{r}{a} + \frac{r^2 - a^2}{a\,(r - a \cos \omega)};$$

par conséquent

$$2A = r^2 \omega + (r^2 - a^2)^2 \int \frac{d\omega}{(r - a \cos \omega)^2} - 2r\,(r^2 - a^2) \int \frac{d\omega}{r - a \cos \omega}.$$



En prenant pour variable auxiliaire tang $\frac{1}{2}\omega$, ou mieux, en posant

$$\sqrt{\frac{r + a}{r - a}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

on trouve aisément,

$$2A = C + r^2 \omega + (r^2 - a^2) \frac{a \sin \omega}{r - a \cos \omega}$$

$$- 2r \sqrt{r^2 - a^2} \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{\frac{r + a}{r - a}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega \right).$$

L'aire APOQA qui correspond aux limites O et π, a pour mesure

$$\pi r\,(r - \sqrt{r^2 - a^2}).$$

Digitized by Google

En intégrant entre O et α, puis entre α et π, on aura

$$\text{APOA} = \tfrac{1}{2} r^2 (\alpha - \tfrac{1}{2}\pi \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha),$$

$$\text{OQAO} = r^2 (\pi - \sin\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\pi \sin\alpha - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha).$$

Deuxième cas : $a > r$. Le point donné que nous désignons maintenant par A′ est extérieur au cercle. L'équation de la courbe étant mise sous la forme

$$\rho = a\frac{a - r\cos\omega}{a\cos\omega - r},$$

le numérateur de ρ est toujours positif; le dénominateur s'annule pour une valeur de $\omega = \alpha$ comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, et déterminée par $\cos\alpha = (r : a)$. Si l'on mène au cercle O la tangente A′T, on a $\alpha = \text{TOA}'$.

Lorsque ω varie entre 0 et α, ρ croît indéfiniment à partir de A, d'où un arc A′P′ indéfini dans la direction OT. La courbe a une asymptote parallèle à OT et dont la distance au pôle O est égale à

$$lim\ \rho \sin(\alpha - \omega) = lim \frac{(a - r\cos\omega)\sin(\alpha - \omega)}{\cos\omega - \cos\alpha} = a\sin\alpha;$$

par conséquent, l'asymptote lL passe par A′. Il y en a une seconde symétrique $l_1 L_1$.

Lorsque ω varie entre α et π, ρ varie entre $-\infty$ et $-a$, d'où un arc indéfini $p'_1 A'$.

Les valeurs de ω comprises entre π et 2π correspondent à deux arcs A′p', A′P′$_1$ symétriques de A′p'_1, A′P′ par rapport à OA′.

L'aire du secteur engendré par le rayon vecteur est donnée par la formule

$$2A = C + r^2\omega - (a^2 - r^2)\frac{a\sin\omega}{r - a\cos\omega}$$

$$+ r\sqrt{a^2 - r^2}\,\text{log. nép.}\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{a-r}{a+r}}}.$$

Par exemple, l'aire comprise entre les limites $\frac{1}{2}\pi$ et π est

$$\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{a}{2r}(a^2 - r^2) - \frac{1}{2} r\sqrt{a^2 - r^2}\,\text{log. nép.}\frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r}.$$

Digitized by Google

Remarque. Posons, dans le premier cas, $a = r\cos\alpha$. L'équation deviendra

$$\rho = r\cos\alpha\,\frac{\cos\omega - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha\cos\omega}.$$

Soit, dans le second cas, au contraire, $r = a'\cos\alpha$, a' étant la distance OA'. L'équation du lieu sera, en désignant cette fois le rayon vecteur par ρ'

$$\rho' = \frac{r}{\cos\alpha}\,\frac{1 - \cos\alpha\cos\omega}{\cos\omega - \cos\alpha}.$$

Par suite, si α a la même valeur dans les deux cas, comme on l'a supposé dans la figure, $\rho\rho' = r^2$. Les deux courbes sont donc inverses l'une de l'autre par rapport au cercle.

On peut écrire la valeur de ρ et de ρ', sous une forme simple, au moyen des fonctions hyperboliques. En posant

$$\cos\omega = \mathrm{Th}\,t, \quad \cos\alpha = \mathrm{Th}\,\beta$$

on trouve

$$\rho = a\,\mathrm{Th}\,(t-\beta), \quad \rho' = a'\,\mathrm{Cth}\,(t-\beta).$$

On peut introduire ces expressions dans l'expression de A, mais sans simplifier l'intégration.

NOTES.

I. 1° Soit, dans le cas de $a < r$, I le milieu de MP. A cause de IA = IP = IM, OI + IA = OM; donc le point I décrit une ellipse (I) ayant pour foyers les points O et A. Par conséquent :

La courbe (P) *peut s'obtenir en diminuant le rayon vecteur de l'ellipse* (I) *mené du foyer* O, *d'une quantité égale au rayon vecteur qui aboutit à l'autre foyer* A (*).

2° Soit OI = 2OI = OP + OM; d'où PJ = OM. Or le point J décrit une ellipse dont un foyer est en O et dont le grand axe est égal à $2r$.

On conclut de là que *la courbe* (P) *est la conchoïde du foyer* O *d'une ellipse* (J), *les rayons vecteurs étant diminués d'une quantité égale au demi-grand axe de cette ellipse.*

D'après un théorème connu, la projection, sur le rayon vecteur d'une ellipse, de la normale arrêtée au petit axe est égale au demi-grand axe.

(*) P est symétrique de A par rapport à la normale menée par I à l'ellipse (I). Il résulte de là que *le lieu* (P) *est homothétique à la podaire du foyer A de l'ellipse* (I), *relative à la développée de l'ellipse.* (J. N.)

Digitized by Google

Par suite, *la courbe* (P) *est le lieu de la projection, sur le rayon vecteur d'une ellipse* (J), *du point où la normale rencontre le petit axe.*

3° Prenons un point S sur la verticale du point O et considérons le cône qui a pour sommet S et pour base l'ellipse (I); le cercle (O) est la projection d'une section (E) du cône (*). Le plan de cette section est facile à déterminer.

Adoptons pour plan vertical le plan SOA. Le plan de (E) est perpendiculaire à ce plan; sa trace horizontale est $D\pi$, l'axe d'homologie du cercle (O) et de la conique (I); elle est donc déterminée par l'intersection de la tangente MD au cercle en M et de la tangente 1K au point correspondant I de l'ellipse (I); la trace verticale du plan E est déterminée en reportant un point du cercle, sur le cône, le point I, par exemple. Soient $\alpha\pi$ et $\alpha\pi'$ ces traces. Si nous considérons maintenant une génératrice quelconque SI du cône, qui rencontre le plan $\pi\alpha\pi'$ en un point dont les projections soient M et M', le symétrique de ce point par rapport à I, aura pour projection horizontale le point correspondant P de la courbe de Jeřábek. Mais il est facile de voir que la projection verticale μ du même point est une hyperbole qui passe par les points α et S et dont les asymptotes sont parallèles aux droites OA et $\alpha\pi$. Donc :

La courbe (P) *est la projection, sur le plan horizontal de la courbe d'intersection d'un cône et d'un cylindre du second ordre.*

4° Imaginons le conoïde qui a pour plan directeur le plan horizontal de (O) et pour directrices la droite SO et la conique (E). Faisons glisser ce conoïde parallèlement à lui-même le long de SO jusqu'à ce qu'il occupe, relativement au plan horizontal de (O), une position symétrique à celle qu'il occupait primitivement. La projection horizontale de la courbe d'intersection de ce conoïde et du cône (I) sera la courbe (P). Donc :

La courbe (P) *est la projection, sur le plan horizontal, de l'intersection du cône* S (I) *et d'un conoïde.*

5° La courbe de M. Jeřábek offre une certaine analogie avec la courbe de séparation d'ombre et de lumière dans l'épure de la vis à filets triangulaires : celle-ci est engendrée par le point d'intersection de AM avec la perpendiculaire élevée par O sur la droite OM.

Le tracé de la tangente indiqué par Poncelet(**) pour la seconde

---

(*) PONCELET, *Propriétés projectives*, 1re édition, p. 262, § 457.

(**) PONCELET, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, p. 450.

Digitized by Google

courbe, peut être étendu à la première et voici comment on peut le déduire de la méthode de Roberval.

Cherchons la tangente au point p' qui correspond au point m du cercle (O); le point fixe est en A′ hors du cercle. Le point p' est assujetti à rester sur l'une et sur l'autre des droites Op', $A'p'$ qui tournent autour des points fixes O, A′. On peut trouver ses vitesses de circulation autour de ces points. En effet, si l'on représente par md la vitesse du point m, la vitesse de circulation de p' autour de O est représentée par la droite $p'g$ parallèle à md et limitée à la droite OA′. La vitesse de circulation de m autour de A′ est la projection me de md sur une normale à mA'. Les droites $A'm$, $A'p'$ ayant la même vitesse angulaire, la vitesse de circulation de p' autour de A′ est représentée par la ligne $p'f$ normale à $A'p'$ et égale à de; car les triangles semblables mde, $mp'A'$ donnent : $me : de = mA' : A'p'$. Par conséquent, en menant gh et fh perpendiculaires à $p'g$ et $p'f$, on aura la vitesse $p'h$ du point p'.

M. Dewulf, colonel du génie à Bordeaux.

II. La *transformation quadrique* étudiée, pour la première fois, par M. Hirst(*) peut être définie comme il suit :

Étant donnés une conique directrice Σ *et un pôle* S, *on mène par* S *une transversale quelconque rencontrant* Σ *en* N *et* N′. *Soient* M *et* P *deux points conjugués harmoniques par rapport à* NN′. *Lorsque le point* M *décrit une courbe* (M), *le point* P *décrit une seconde courbe* (P) *qui est la transformée quadrique de la ligne* (M).

Elle comprend la transformation par rayons vecteurs réciproques, si la directrice Σ est une circonférence de centre S. Nous avons rencontré, dans *Mathesis*, t. V, p. 9, le cas particulier où Σ est une circonférence passant par le pôle S.

Prenons pour Σ un système de deux droites D, D′. Si D′ passe par le pôle, la transformation de M. Hirst se confond avec l'homologie harmonique. Si D′ passe à l'infini, les points M et P sont symétriques par rapport au point où la transversale SM rencontre D; les courbes (M) et (P) peuvent être dites *symétriques l'une de l'autre* par rapport à la droite D et au point S(**). Dans ce sens, la cissoïde et la strophoïde sont des

(*) N. A. M. (2) V, 63, 213.

(**) Ce mode de transformation a été étudié par MM. d'Ocagne, (*Mathesis*, IV, 98) et G. de Longchamps (N. C. M. et *Journal de Bourget*, passim).

Digitized by Google

courbes symétriques de la circonférence, le pôle S étant sur la circonférence et l'axe D, le diamètre ou la tangente perpendiculaires au rayon mené par S.

Supposons que les droites D, D′ soient celles qui joignent un point donné S′ aux points cycliques du plan; ou, ce qui revient au même, prenons pour Σ un cercle de rayon nul et de centre S′; les droites S′M, S′P seront rectangulaires. Nous aurons ainsi la *transformation réciproque* imaginée par M. de Longchamps(*).

La transformée réciproque d'un cercle de centre S est la courbe de M. Jeřábek; celle d'un cercle de centre S′ est la courbe de séparation d'ombre et de lumière dans l'épure de la vis à filets triangulaires.

2° Soient M, P, M′, P′ les points où deux transversales Δ, Δ′ menées par S rencontrent deux courbes réciproques (dans le sens de M. de Longchamps). Les droites MP, M′P′ étant vues de S′ sous le même angle $\frac{1}{2}\pi$, les quatre droites MP, M′P′, MM′, PP′ touchent une même conique de foyer S′; le point d'intersection T des lignes MM′, PP′ est sur la directrice correspondant à S′. Faisant tendre Δ′ vers Δ, on conclura que S′ est le foyer d'une conique touchant SM en S, et les tangentes MT, PT menées aux courbes réciproques (M) et (P), en deux points *m*, *p* qui sont sur une même perpendiculaire élevée par S′ sur S′T. Donc si la tangente MT est connue, on construira la droite S′*m* symétrique de S′S par rapport à S′M; on tracera par S′ une perpendiculaire à S′*m* et rencontrant la tangente donnée MT au point T qu'on joindra à P; TP est la tangente à la courbe (P).

On démontre facilement que les droites S′S et S′T sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle MS′P. On retrouve ainsi une construction due à M. d'Ocagne (*Journal de Bourget, Math. spéc.*, 1885, p. 15) et qu'on pourrait appliquer à la courbe de M. Jeřábek.

La construction la plus simple de la tangente à cette courbe résulte de ce que cette ligne est une conchoïde de l'ellipse (J).

Dans la transformation quadrique générale, les tangentes MT, PT aux points homologues M, P des courbes (M) et (P), et celles aux points N, N′ de la directrice Σ enveloppent une conique qui touche la transversale SN en S; par conséquent, si les tangentes en N, N′ rencontrent la droite MT que nous supposons connue, aux points *n*, *n*′, le point T peut se déduire de la relation (NN′SP) = (*nn*′MT). (J. N.)

(*) *Journal de Bourget* (*Math. spéc.*), 1882, p. 49.

Digitized by Google

×Question 349.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 143.)

Les centres des sphères exinscrites à un tétraèdre régulier sont situés sur la sphère circonscrite; leurs points de contact avec les faces appartiennent aux cercles circonscrits à ces faces. Cette proposition subsiste aussi pour le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales. (J. NEUBERG.)

Solution par MM. VAN DEN BROECK et LIÉNARD. Considérons un tétraèdre ABCD dont les arêtes opposées sont égales. Les quatre faces sont égales entre elles; donc les cercles circonscrits sont égaux et, par conséquent, leurs centres sont équidistants du centre O de la sphère circonscrite à ABCD. Le point O est donc également le centre de la sphère inscrite; c'est aussi le centre de gravité du tétraèdre, car le plan bissecteur d'un dièdre divise l'arête opposée en parties proportionnelles aux faces du dièdre, c'est-à-dire en parties égales.

Soit E le centre de la sphère exinscrite qui touche la face ABC intérieurement; les points O et E divisent la droite joignant D au centre de gravité d de BCD, en parties harmoniques. Or $dO = \frac{1}{3}DO$; par suite $EO = DO$, et E est la seconde extrémité du diamètre OD de la sphère ABCD.

La projection de O sur le plan DAB, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, coïncide avec le centre du cercle DAB; il en résulte que la projection de E est le point de ce cercle qui est diamétralement opposé à D.. Mais cette projection est le point de contact du plan DAB avec la sphère exinscrite E.

M. Pisani a résolu la question 349 dans le cas d'un tétraèdre régulier.

×Question 366.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 199.)

Soient r' r' les rayons sphériques de deux petits cercles tracés sur une même sphère et tangents extérieurement, et soit t la longueur de l'arc de grand cercle qui les touche. Démontrer la relation.

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r'}.$$ (J. NEUBERG.)

Solution par M. E. CESÀRO. Les grands cercles joignant les pôles des petits cercles à leurs points de contact respectifs avec t, forment, avec

Digitized by Google

la ligne des centres, un triangle dont les côtés sont $\frac{1}{2}\pi - r$, $\frac{1}{2}\pi - r'$, $r - r'$, tandis que l'angle opposé au dernier côté est t. Conséquemment

$$\cos(r + r') = \sin r \sin r' + \cos r \cos r' \cos t;$$

d'où

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r' = \frac{1 - \cos t}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} t.$$

Solution par MM. Henrard, Deprez, Lambert *et* Barlet. Soient O, O' les pôles des cercles donnés, A leur point de contact, B, B' les points de contact de t, C le point d'intersection de t avec l'arc tangent en A aux cercles O, O'. Le triangle OCO' est rectangle en C, et AC en est la hauteur; donc, d'après un théorème connu (*Mathesis*, questions d'examen, t. IV, p. 176, n° 162) :

$$\sin^2 AC = \operatorname{tg} OA . \operatorname{tg} O'A.$$

Mais $AC = CB = CB' = \frac{1}{2} t$; donc, etc.

Solution analogue par M. Pisani, qui applique la formule connue

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p - b) \sin(p - c)}{\sin b \sin c}}$$

au triangle POO' ayant pour sommet P, pôle de l'arc de grand cercle tangent aux deux petits cercles.

×Question 368.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 200.)

Si $n = \mathscr{M}\, 3 + 1$, *on a identiquement*

$$C_{2n,1} - 3C_{2n,3} + 3^2 C_{2n,5} - \cdots \pm 3^{n-1} C_{2n,1} = 2^{2n-1}.$$ (E. Catalan.)

Solution par M. E. Cesàro. De la formule de Moivre

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

on déduit

$$\frac{\sin n\varphi}{\cos^{n-1}\varphi \sin\varphi} = C_{n,1} - C_{n,3}\, tg^2\varphi + C_{n,4}\, tg^4\varphi \cdots\cdots$$

En particulier, pour $\varphi = \frac{1}{3}\pi$:

$$2^n \sqrt{3} \sin \tfrac{1}{3} n\pi = C_{n,1} - 3C_{n,3} + 3^2 C_{n,5} \cdots\cdots$$

Plus particulièrement encore, si le reste de n divisé par 6 est 1 ou 2, le premier membre devient 2^{n-1}. Dans le second cas, on obtient la formule proposée.

Solution analogue par M. Fr. Falisse.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**437.** Étant donnés n points sur une circonférence de cercle ($n > 3$), peut-on inscrire (ou circonscrire) à ce cercle une couronne de n cercles tangents entre eux de proche en proche, et tangents au cercle donné respectivement aux points donnés ?

Dans la négative, comment peut-on modifier l'énoncé pour rendre le problème possible et déterminé ? (F. MULLENDORF.)

×**438.** Inscrire (ou circonscrire) à un cercle donné une couronne composée de $2n$ cercles tangents entre eux de proche en proche, et tangents au cercle donné, n de ces cercles étant de rayon R, et n de rayon r, les premiers alternant avec les seconds, et R étant à r dans un rapport donné $m : p$. (F. MULLENDORF.)

439. Soient B un point fixe d'une corde AD d'un cercle O, C un point quelconque de la circonférence. 1° Trouver le lieu du point de rencontre H des hauteurs AA′, BB′, CC′ du triangle ABC; examiner les cas où ce lieu est une cissoïde ou une strophoïde. 2° La tangente en H à cette courbe et la tangente en C au cercle se coupent en un point E, qui décrit une cardioïde; ce point E est indépendant de la distance AB. (JEŘÁBEK.)

440. Deux sommets A, B d'un triangle sont fixes, et le troisième C décrit une courbe donnée (C). Trouver, par la méthode de Roberval, les tangentes aux lieux décrits par le point de concours des hauteurs, le centre du cercle inscrit, et le centre du cercle des neuf points. (J. NEUBERG.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

186. Par un point donné, faire passer une circonférence telle que les tangentes menées de deux autres points donnés aient des longueurs connues, ou telle que les angles sous lesquels on la voit de deux points donnés aient des valeurs données.

187. Trouver les conditions nécessaires pour que l'équation

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

ait trois racines dont l'une soit moyenne arithmétique ou moyenne géométrique entre les deux autres, ou pour que ces racines soient les tangentes, les cosinus ou les sinus des angles d'un triangle, ou qu'elles soient les côtés d'un triangle rectangle.

Digitized by Google

188. Sur la bissectrice d'un angle droit YOX se meut un point, milieu d'une droite AB, de longueur constante $2l$, perpendiculaire à cette bissectrice. La perpendiculaire abaissée de A sur OX rencontre la droite OB en un point M dont on demande le lieu géométrique.

(De Rocquigny.)

189. Mettre $6a^2 + 10b^2 + 7c^2$ sous la forme de six carrés ou de sept carrés. (De Rocquigny.)

190. Un angle AOB tourne autour de son sommet O. Par le point A fixe sur l'un des côtés, on mène une parallèle à une droite donnée OX. Lieu du point où cette parallèle rencontre le second côté OB de l'angle.

$$\left[\text{Équation : } \rho = a\frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin\omega}.\right]$$

(De Rocquigny.)

191. On considère un trapèze AA'B'B rectangle en A et A' ; les côtés AA', AB, A'B' sont fixes, le côté BB' tourne autour d'un point fixe O de la droite AA'. Lieu de la projection de B sur la diagonale AB'.

(De Rocquigny.)

192. Démontrer les inégalités

$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2,$$
$$abc > (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a),$$

a, b, c étant trois nombres positifs.

193. Soient I, I_1, I_2, I_3 les centres des cercles tangents au trois côtés du triangle ABC. On a les relations

$$AB.AC = AI.AI_1, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BI.BI_2}{CI.CI_3}.$$

(J. Gillet.)

194. Tout nombre entier terminé par 76 a son carré terminé par 76.

(De Rocquigny.)

195. D'un jeu de 32 cartes ; on tire 3 cartes. Quelle est le probabilité de tirer : 1° trois rois ; 2° trois cartes de la même couleur ; 3° trois cartes dont les points font 31 ; 4° une tierce ; 5° deux dix et un sept?

196. D'un jeu de 52 cartes on tire au hasard 7 cartes. Quelle est la probabilité de tirer : 1° une septième ; 2° 2 cœurs, 4 piques, et un carreau ; 3° 3 dix, 3 sept et 1 six ; 4° quatre images et trois cartes sans image?

Rectifications. Page 68, ligne 14, lisez Falisse, Meurice, au lieu de Falisse. Page 73, ligne 6, lire *membre*, au lieu de nombre.

Digitized by Google

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SIMULTANÉES,

par M. De Tilly.

1. Considérons les équations simultanées

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = 0, \tag{1}$$

où P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont des fonctions $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_2(x)$, de x seul. Si l'on multiplie la première par $e^{\int P_1 dx}$ et la seconde par $e^{\int Q_2 dx}$, les équations résultantes pourront être mises sous la forme :

$$D_x\left(ye^{\int P_1 dx}\right) + Q_1 e^{\int (P_1 - Q_2) dx}\left(ze^{\int Q_2 dx}\right) = 0,$$
$$D_x\left(ze^{\int Q_2 dx}\right) + P_2 e^{-\int (P_1 - Q_2) dx}\left(ye^{\int P_1 dx}\right) = 0,$$

et elles seront immédiatement intégrables, par l'élimination du coefficient du second terme, si ce coefficient est le même dans les deux équations, ou si l'on a

$$Q_1 e^{\int (P_1 - Q_2) dx} = P_2 e^{-\int (P_1 - Q_2) dx},$$

ou encore,

$$\sqrt{\frac{P_2}{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2) dx}. \tag{2}$$

C'est le résultat trouvé par M. Ibach(*), à la suite de calculs, trop longs, d'après ce qui précède(**), mais exacts(***).

(*) N. A. M., avril 1884, (3) III, p. 172-181.

(**) La possibilité de simplifier les calculs de M. Ibach a déjà été remarquée comme on le voit par deux notes intéressantes de MM. Tardy et Juhel-Renoy (Ib., juin 1884, p. 257-263). Mais la méthode que je viens d'indiquer paraît la plus simple de toutes. On verra plus loin que la méthode compliquée de M. Ibach peut conduire à une formule plus générale.

(***) Les critiques de M. Catalan (Ibid., juin 1884, p. 263-270) ne peuvent se rapporter qu'aux applications, dans lesquelles M. Ibach doit effectivement avoir commis une erreur. — Sur un autre point encore, je ne partage pas complètement l'avis de M. Catalan. Ramener le système (1) à la forme $\frac{d^2y}{dx^2} + Xy = 0$, c'est entrer dans une impasse, malgré les études de Liouville. Il semblerait plus avantageux de faire le contraire et de ramener cette dernière forme au système (1), parce qu'alors on dispose de quatre fonctions indéterminées, assujetties seulement à deux conditions; celle qui exprime l'équivalence avec l'équation donnée et celle qui exprime la possibilité d'intégrer. Pour cette raison, et aussi à cause de ce qui va être dit dans le texte, les recherches analogues à celles de M. Ibach (c'est-à-dire

Digitized by Google

2. Dans les mêmes équations (1), posons $y = y_1 e^{\int t dx}$, $z = z_1 e^{\int t dx}$, il viendra, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} + (P_1 + t) y_1 + Q_1 z_1 &= 0, \\ \frac{dz_1}{dx} + P_2 y_1 + (Q_2 + t) z_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

De là résulte que, dans les équations données (1), on peut ajouter à P_1 et à Q_2 une même fonction quelconque.

S'il existait donc une condition d'intégrabilité des équations (1) :

$$F(P_1, Q_1, P_2, Q_2) = 0, \tag{4}$$

analogue à (2), mais dans laquelle les coefficients P_1 et Q_2 entrassent autrement que par l'intermédiaire du binôme $P_1 - Q_2$, cette condition pourrait toujours être réalisée, en remplaçant d'abord P_1 et Q_2 respectivement par $P_1 + t$ et $Q_2 + t$, puis déterminant t de manière à satisfaire à l'équation (4).

On pourrait donc alors intégrer le système (1), et par conséquent aussi intégrer toutes les équations linéaires du second ordre à deux variables. Malheureusement, il semble impossible de découvrir une condition (4) où P_1 et Q_2 n'entrent pas uniquement sous la forme $P_1 - Q_2$, du moins si l'on exige que P_1 et Q_2 ne soient affectés, dans la relation (4), d'aucun signe de différentiation ni d'intégration.

La relation de M. Ibach satisfait à cette dernière exigence, parce que l'on peut mettre cette relation sous la forme

$$P_1 - Q_2 = \sqrt{\frac{Q_1}{P_2}} D_x \left(\sqrt{\frac{P_2}{Q_1}} \right),$$

mais elle ne satisfait évidemment pas à la première : t disparait de lui même si l'on essaye la transformation dont j'ai parlé.

Si l'on consent à ce que P_1 et Q_2 soient affectés de signes de différentiation et d'intégration, il est facile de trouver une infinité de conditions d'intégrabilité où P_1 et Q_2 entrent autrement que sous la forme $P_1 - Q_2$, mais alors il n'est plus certain qu'on puisse en tirer la valeur de t.

3. Je signalerai une seule de ces formules, parce qu'elle constitue une généralisation de celle de M. Ibach.

---

dans lesquelles on détermine, entre les coefficients P_1, Q_1, P_2, Q_2, des relations qui rendraient les équations (2) intégrables), me paraissent utiles et rationnelles.

Digitized by Google

Il est évident que cet auteur aurait pu se borner à écrire la première de ses équations (11), et qu'il aurait pu ajouter au second membre de l'autre une fonction quelconque + 2U(*). Par ce raisonnement plus général, il serait arrivé, comme il est facile de le voir, à la condition suivante :

$$\frac{U}{2Q_1} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2 - U)\, dx}. \qquad (5)$$

En faisant U = 0, on retrouve, naturellement, la formule de M. Ibach, mais la relation (5) en contient une infinité d'autres, puisqu'on peut y donner à U une forme quelconque.

En faisant $U = P_1 - Q_2$, on trouverait la condition, probablement connue :

$$P_1 - Q_2 = \frac{1}{c} P_2 - c Q_1.$$

En faisant, au contraire, $U = -Q_2$, on séparerait complètement les coefficients P_1 et Q_2, mais l'un des deux (P_1) resterait compris sous un signe d'intégration.

4. Il existe une autre transformation des équations (1), sur laquelle on peut faire des remarques à peu près analogues à celles du n° 2. Si l'on remplace x par $\varphi(u)$, u devenant la nouvelle variable indépendante, les équations (1) sont remplacées par les suivantes :

$$\frac{dy}{du} + P_1[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,y + Q_1[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,z = 0$$

$$\frac{dz}{du} + P_2[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,y + Q_2[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,z = 0.$$

On voit que, dans toutes les conditions d'intégrabilité des équations (1), on peut remplacer $P_1(x)$ par $P_1[\varphi(u)]\,\varphi'(u)$, etc. S'il existait donc une condition d'intégrabilité

$$F(P_1, Q_1, P_2, Q_2) = 0, \qquad (6)$$

qui ne fût pas homogène, c'est-à-dire dans laquelle φ' ne disparaîtrait pas lors du remplacement de x en fonction de u, on obtiendrait une équation intégrable en φ et φ', laquelle ferait connaître une fonction φ permettant de réaliser la condition d'intégrabilité, au moyen de la transformation préalable que nous venons d'indiquer.

(*) Voir à la fin de l'article, une note sur la méthode de M. Ibach (P. M.)

Digitized by Google

Malheureusement, il semble aussi difficile de trouver une condition d'intégrabilité non homogène que d'en trouver une qui contienne P_1 et Q_2 autrement que sous la forme $P_1 - Q_2$.

NOTE. Voici le résumé de la méthode de M. Ibach. Il multiplie la première équation (1) par θ_1, la seconde par θ_2; il fait la somme et la différence des équations ainsi obtenues. Dans ce nouveau système, il pose $\xi = \theta_1 y + \theta_2 z$. $\zeta = \theta_1 y - \theta_2 z$, et il se sert de ces relations pour en éliminer y, z, y', z'. Il profite de l'indétermination de θ_1, θ_2 pour que dans le système en ξ, ζ, la première équation ne contienne que ξ, la seconde que ζ. Il trouve ainsi les équations, numérotées (11) dans son travail :

$$\frac{P_1\theta_1 + P_2(\pm\theta_2) - \dfrac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = \frac{Q_1\theta_1 + Q_2(\pm\theta_2) - \dfrac{d(\pm\theta_2)}{dx}}{\pm\theta_2}.$$

En faisant la somme et la différence de ces équations, il arrive enfin à la condition (2), établie autrement par MM. Tardy et Juhel-Renoy.

(P. M.)

SUR LES CONSTRUCTIONS DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE AVEC LA DROITE SEULE;

par M. DE TILLY, membre de l'Académie royale de Belgique.

Il existe des méthodes certaines pour reconnaître si un problème de Géométrie, entièrement déterminé (c'est-à-dire se ramenant, en dernière analyse, à la résolution d'un nombre d'équations égal à celui des inconnues) peut, ou non, se résoudre avec la droite et le cercle.

D'un autre côté, toute construction qui peut se faire avec la droite et le cercle, peut aussi se faire avec le cercle seul(*). Mais il y a une restriction à apporter à ce dernier énoncé, ou du moins il importe de ne pas lui donner une extension trop grande.

Pour joindre deux points, pour trouver l'intersection de deux droites, on n'a pas besoin de supposer l'existence matérielle d'un plan dans lequel la construction se ferait; il en est de même, à la rigueur (ou conventionnellement, si l'on veut), pour trouver l'intersection d'une droite et d'un cercle (ou même d'une droite et d'une sphère), parce que l'on

---

(*) Voir, par exemple, *Mathesis*, t. II, p. 220.

Digitized by Google

peut tracer d'abord la droite, puis amener sur elle l'une des pointes du compas, avec l'ouverture voulue, en appuyant l'autre pointe au centre.

Mais il n'en est plus de même quand il faut trouver l'intersection de deux cercles. Cette opération ne serait plus géométrique et deviendrait un pur tâtonnement, si l'on ne supposait pas l'existence matérielle du plan de l'un des cercles, pour y appuyer la pointe du compas dans le premier tracé.

Je démontrerai plus loin que l'emploi du plan peut toujours être remplacé par l'emploi de la droite(*). L'énoncé complet du théorème que j'ai rappelé est donc celui-ci :

Tout ce qui peut se faire avec des droites, des plans et des cercles, peut aussi se faire avec des droites et des cercles, ou bien avec des plans et des cercles, mais non avec des cercles seuls.

On peut donc éviter l'emploi de la droite, *ou* l'emploi du plan, mais non les deux.

Peut-on éviter l'emploi du cercle?

Tout d'abord on peut, comme ci-dessus, éliminer le plan, et ne s'occuper que de droites et de cercles.

L'intersection de deux cercles peut certainement se remplacer par celle d'une droite et d'un cercle(**).

Mais cette dernière intersection peut elle se ramener à des intersections de droites et à des reports de longueurs?

J'avais toujours considéré la négative comme bien certaine et bien démontrée.

L'étude récente des travaux de M. Le Paige, dans lesquels cet habile géomètre parvient à faire tant de choses avec la droite et le plan seuls(***),

---

(*) Combiné avec celui de la *relation métrique élémentaire*, c'est-à-dire qu'il faut admettre que l'on reporte une longueur donnée, sur une droite donnée, à partir d'un point. Je ne reviendrai plus sur cette hypothèse, dont l'emploi me paraît indispensable dans tous les systèmes possibles. En effet, qu'il s'agisse seulement de mener, au point A, une perpendiculaire à la droite AB; on ne voit pas par quelle combinaison de droites et de plans on pourrait jamais y arriver, sans reporter des longueurs. Je ne parle pas de cercles, car admettre que l'on puisse tracer un cercle, c'est admettre que l'on puisse reporter une longueur. C'est même admettre davantage.

(**) De Coatpont, N. C. M., t. III, p. 207.

(***) Et sans la relation métrique élémentaire. Celle-ci pourrait remplacer l'emploi du plan. La réciproque n'est pas vraie.

Digitized by Google

a jeté le doute dans mon esprit. J'ai essayé de démontrer l'impossibilité de la réduction dont il s'agit, et je n'y suis point parvenu.

Pourquoi peut-on construire, avec la droite seule, l'expression $\sqrt{a^2 + b^2}$ et non l'expression $\sqrt{a^2 - b^2}$? Pourquoi peut-on constuire encore ce dernier radical si a et b sont commensurables entre eux(*) et non dans le cas contraire? Je croyais savoir cela et, en essayant de le rédiger, je me suis aperçu que je l'ignore.

Je terminerai donc cette note en justifiant les principes que j'ai admis dans les lignes qui précèdent, et notamment celui d'après lequel l'emploi du plan peut toujours se remplacer par l'emploi de la droite seule.

1. Par un point, mener une parallèle à une droite.

Joignez le point donné à un point quelconque de la droite donnée; prolongez la droite ainsi obtenue d'une longueur égale à elle-même; joignez l'extrémité à un autre point de la droite donnée; prolongez la nouvelle droite obtenue d'une longueur égale à elle-même; et enfin, joignez la dernière extrémité obtenue au point donné.

2. Construire la bissectrice d'un angle. Portez sur les deux côtés deux couples de distances égales, et joignez les quatre points obtenus par deux droites, qui se croiseront en un point de la bissectrice cherchée.

3. Par un point, mener une perpendiculaire sur une droite. Soit O le point et AB la droite. Le lecteur est prié de faire la figure, qui se trouvera tout entière dans le plan OAB, bien que ce plan n'existe pas matériellement. Joignons OA, OB. En A et en B, menons les quatre bissectrices (2). Soit C le point des concours des bissectrices intérieures au triangle AOB, D le point de concours des deux autres. Dans l'un des triangles ACB, ADB (n'importe lequel), nous pouvons construire deux hauteurs, en menant des parallèles aux deux bissectrices qui ne sont pas côtés du triangle (1), donc nous obtiendrons la troisième hauteur, qui est une

---

(*) $\sqrt{a^2 + b^2}$ se construit par un triangle rectangle, car on verra dans la suite du texte (en supposant qu'il puisse y avoir doute sur ce point) que l'on peut mener des perpendiculaires sans tracer de cercle. Si a et b ont pour commune mesure c, de manière que $a = mc$, $b = nc$, on a $\sqrt{a^2 - b^2} = c\sqrt{m^2 - n^2}$, $m^2 - n^2$ étant un nombre entier. Or la racine d'un nombre entier se construit aussi par une chaîne de triangles rectangles, que l'on peut réduire à trois, parce que tout entier est la somme de quatre carrés. Ayant la racine $\sqrt{m^2 - n^2} = cp$ il reste à construire une quatrième proportionnelle à 1, c, et cp, ce qui est également résolu dans la suite du texte.

Digitized by Google

perpendiculaire à AB dans le plan de la figure. Il reste à lui mener, par O, une parallèle (1).

4. Par un point pris sur une droite, lui mener une perpendiculaire dans le plan déterminé par cette droite et un point extérieur.

C'est la même chose. Le point O de la figure précédente ne servira qu'à déterminer le plan, et la parallèle sera menée par le point pris sur la droite.

5. Diviser une droite en parties égales, en parties proportionnelles à des longueurs données; trouver une troisième ou une quatrième proportionnelle à des longueurs données. Il suffit évidemment de tracer une droite auxiliaire au hasard, puis des parallèles.

6. Par un point d'une droite, mener une autre droite qui forme avec la première un angle égal à un angle donné, et situé dans un plan déterminé par un point extérieur à la droite. — Construire, dans une position donnée, une figure égale ou semblable à une figure donnée. — Trop facile pour être détaillé.

7. Par un point hors d'un plan (donné par une droite et un point), mener une perpendiculaire à ce plan non construit, et en trouver le pied. Du point hors du plan, j'abaisse une perpendiculaire sur la droite (3). Par le pied, je mène, dans le plan (4), une perpendiculaire à la droite donnée du plan, et enfin, sur cette dernière, j'abaisse une perpendiculaire du point extérieur au plan (3).

8. Trouver l'intersection d'une droite avec un plan non construit, mais déterminé.

De deux points de la droite, je mène des perpendiculaires au plan et je construis leurs pieds (7). Je joins ces pieds et je suis ramené à l'intersection de deux droites.

9. Trouver l'intersection de deux plans non construits, mais déterminés. Il suffira de tracer deux droites dans l'un et de chercher leurs intersections avec l'autre (8).

A cause des problèmes 8 et 9, on ne peut jamais avoir besoin de construire un plan matériellement; il suffit toujours de construire des droites. Nous avons vu, en effet, que le plan ne peut jamais être nécessaire non plus pour appuyer la pointe d'un compas, quand on dispose de la droite, puisque l'intersection de deux cercles se remplace par l'intersection d'une droite et d'un cercle.

Digitized by Google

REMARQUES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (*),

par M. E. Cesàro, élève-ingénieur, étudiant à Rome.

I. Soient ABC un triangle, O un point de la circonférence circonscrite, M, N ses projections sur AB, AC. *La projection de* BC *sur* MN *est égale à* MN. Cette propriété a été démontrée par M. N. Goffart dans les *Nouvelles Annales* (1881, p. 523). Voici une autre démonstration : — On sait que la projection P de O, sur BC, appartient à MN (*droite de Simson*). Les angles BOC, MON, suppléments de A, sont égaux entre eux. Il en est de même des angles OBC, OMN, puisque le quadrilatère OMBP est inscriptible. Les triangles OBC, OMN sont donc semblables. Or, OM est la projection de OB sur son homologue OM. Il s'ensuit que MN est la projection de BC sur son homologue MN.

II. Étant donné un triangle ABC, il est facile de lui inscrire un triangle A'B'C', qui lui soit semblable. Soient, dans ce but, L, M, N les milieux des côtés de ABC, et O l'orthocentre de LMN, centre de la circonférence ABC. Si l'on fait tourner les droites OL, OM, ON autour de O, dans le même sens et d'un même angle α, elles rencontreront les côtés de ABC en A', B', C'. Le triangle A'B'C' répond à la question. Il est, en effet, décomposable en trois triangles OB'C', OC'A', OA'B', respectivement semblables aux triangles OMN, ONL, OLM, qui composent LMN, de sorte qu'il est semblable à LMN, et, par suite, à ABC. Or, l'angle MON étant le supplément de A, il en est de même de son égal B'OC'. La circonférence AB'C' passe donc par O, et MN est la *droite de Simson* du triangle AB'C', relative au point O. D'après la *Remarque I*, *la projection de* B'C' sur MN, ou *sur* BC, *est égale* à MN, c'est-à-dire *à la moitié de* BC. Ceci résout la *Question* 274 (*Mathesis*, t. III, p. 215).

III. D'après la *Remarque II*, le rapport de similitude des triangles ABC, A'B'C' est $2\cos\alpha$. Si, en supposant A'B'C' *fixe*, on lui circonscrit

---

(*) Cet article contient la solution des questions 201, 274, 419 de *Mathesis*, et de la question 1373 des *Nouvelles Annales*. Voir plus bas, d'autres solutions de la question 274. Nous avons reçu aussi de MM. Dethier, Gob et Laurens, de bonnes solutions de la question 419 que le défaut d'espace ne nous permet pas de reproduire. (J. N.)

Digitized by Google

un autre triangle $A_1B_1C_1$, semblable à ABC, et dont les côtés soient perpendiculaires aux côtés homologues de ABC, on pourra écrire

$$ABC = 4A'B'C'.\cos^2\alpha,\ A_1B_1C_1 = 4A'B'C'.\sin^2\alpha,$$

d'où

$$ABC + A_1B_1C_1 = 4A'B'C' = \text{constante},$$

conformément à la *Question* 201 (*Mathesis*, t. III, p. 23).

IV. Supposons, de nouveau, ABC *fixe* et A'B'C' *variable*. Soit H le point de rencontre de B'C' avec MN. En vertu du *théorème de Simson*, OH est perpendiculaire à B'C', d'où il suit que l'enveloppe de B'C' est l'*antipodaire* de MN, relativement à O. Elle est donc la parabole, de foyer O, qui est touchée par MN en son sommet. Cette *remarque* permet de résoudre complètement la *Question* 419 (*Mathesis*, t. V, p. 47). Il faut observer, à cet effet, que les droites C'A', A'B' enveloppent deux autres paraboles, ayant pour foyer commun le point O, et pour sommets les projections de O sur NL, LM. Dans le *triangle des sommets de ces paraboles*, O est le centre du cercle inscrit, L, M, N les centres des cercles ex-inscrits. D'autre part, par la considération des cas où un côté de A'B'C' se confond avec un côté de ABC, on reconnaît que chaque parabole touche *deux* côtés de ABC. Ce triangle est donc le *triangle des tangentes communes*. Dès lors, les propriétés contenues dans la *Question* 419 deviennent évidentes.

V. Tout cela subsiste dans le cas plus général où A'B'C' *n'est pas semblable* à ABC. On sait, en effet, que les circonférences AB'C', BC'A', CA'B' se coupent en un même point O. Soient L, M, N les projections de ce point sur les côtés de ABC. Les angles MON, NOL, LOM, suppléments de A, B, C, sont respectivement égaux aux angles B'OC', C'OA', A'OB', et, par conséquent, A'B'C' est semblable à LMN. En tenant compte de ces propriétés, la *Remarque II* donne la solution de la *Question* 201. Observons, en outre, que MN, NL, LM sont les *droites de Simson* des triangles AB'C', BC'A', CA'B', relativement au point O. On en déduit que les droites B'C', C'A', A'B' enveloppent trois paraboles, dont les sommets sont les projections du foyer commun O, sur les côtés de LMN. En réalité, nous n'obtenons pas une généralisation de la *Question* 419. En effet, on rentre immédiatement dans l'énoncé même de cette *Question*, en menant, par les sommets de LMN, les parallèles aux côtés opposés. On reconstitue ainsi le triangle ABC, que l'on considérait plus haut.

Digitized by Google

QUESTIONS DE LICENCE(*),

par M. H. BROCARD, capitaine du génie, à Montpellier.

XII. *On propose de trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x,$$

A, B, C, D *étant des constantes.* (PARIS, juillet 1870.)

L'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0,$$

dont la caractéristique contient les racines doubles + 1 et — 1, est

$$y = (a + bx)\,e^x + (a' + b'x)\,e^{-x},$$

a, b, a', b', étant des constantes arbitraires. L'intégrale générale cherchée est donc de la forme

$$y = (a + bx + cx^2)\,e^x + (a' + b'x + c'x^2)\,e^{-x} + M\sin x + N\cos x.$$

En identifiant, l'on trouve

$$y = \left(a + bx + \frac{A}{8}x^2\right)e^x + \left(a' + b'x + \frac{B}{8}x^2\right)e^{-x} + \frac{C}{4}\sin x + \frac{D}{4}\cos x.$$

XIII. *Intégrer l'équation*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + px + q.$$

(PARIS; novembre 1882.)

L'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2.\frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2} = 1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = x + p\,lx - \frac{q}{x} - C.$$

La substitution $y = x^2z$ facilite l'intégration et l'on trouve

$$y = c_1x^2 + (c - p)\,x + \frac{q}{2} + (x^2 - px)\,lx.$$

(*) Voir *Mathesis*, t. II, p. 102, 127, 161; t. III, p. 128, 182; t. IV, p. 124; t. V, p. 54. Il ne faut voir dans ces exercices que des indications destinées à mettre les élèves sur la voie de solutions complètes et de développements plus étendus, qui ne sauraient trouver place dans *Mathesis*. (H. B.)

Digitized by Google

XIV. *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$ax^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\,(y-2a)\frac{dy}{dx} - 2y^2(y-2a) = 0$$

(Paris; juillet 1884.)

On en tire

$$ax\frac{dy}{dx} = -y\,(y-2a) \pm y\sqrt{y^2-2ay}.$$

La substitution $\sqrt{y^2-2ay} = ty$ donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\pm 1 - t}.$$

L'intégration s'achève aisément, et l'on trouve en définitive,

$$y = \frac{2ax^2}{2cx - c^2}.$$

L'équation $y = 2a$ est une intégrale singulière. (*A continuer.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 152.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 158.)

Par un point quelconque P *pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en* O, *on mène à cette courbe trois normales qui la rencontrent aux points* A, B, C. *Les longueurs* PA, PB, PC, PO *étant représentées par* a, b, c, l, *on demande de former l'équation du* 3e *degré dont les racines sont* $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$ *et d'indiquer les signes des racines d'après la position du point* P *dans les diverses régions du plan.*

(Concours général de France, 1882.)

Solution par M. Boubals, *professeur à l'école régimentaire du génie, à Montpellier.* Soient (α, β) les coordonnées de P, (x, y) celles de l'un des points A, B, C et z l'une des quantités $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$. On aura les équations

$$z = \alpha^2 + \beta^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2 = 2\alpha x + 2\beta y - (x^2 + y^2), \quad (1)$$

$$y^2 = 2px \ldots. (2); \quad \beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x) \ldots. \quad (3)$$

entre lesquelles il faut éliminer x, y. De (2) et (3), on tire

$$y^3 - 2p\,(\alpha - p)\,y - 2p^2\beta = 0. \quad (4)$$

Digitized by Google

Si l'on multiplie (4) par y et qu'on remplace y^4 par $4p^2x^2$, $-2p(\alpha-p)y^2$ par $4p^2y^2-2p(p+\alpha)y^2$ ou par $4p^2y^2-4p^2(p+\alpha)x$, on trouve

$$2x^2+2y^2-2(p+\alpha)x-\beta y=0, \qquad (5)$$

équation du cercle ABCO. Au moyen de celle-ci et de (2), on réduit (1) à

$$(\alpha-p)y^2+3p\beta y-2pz=0. \qquad (6)$$

Ajoutons les équations (4) et (6) multipliées respectivement par z et $-p\beta$; nous aurons

$$zy^2-p\beta(\alpha-p)y-2pz(\alpha-p)-3p^2\beta^2=0. \qquad (7)$$

Il reste à éliminer y entre (6) et (7). On trouve, toutes réductions faites,

$$4z^3-8(\alpha-p)^2z^2+4(\alpha-p)[(\alpha-p)^3-9p\beta^2]z+p\beta^2[4(\alpha-p)^3-27p\beta^2]=0.$$

Pour faire évanouir le second terme, posons

$$z=u+\frac{2(\alpha-p)^2}{3};$$

l'équation se réduira à

$$u^3+mu+n=0,$$

m et n ayant les valeurs

$$m=-\tfrac{1}{3}(\alpha-p)[(\alpha-p)^3+27p\beta^2],$$

$$n=\tfrac{2}{27}(\alpha-p)^6-5(\alpha-p)^3.p\beta^2-\tfrac{27}{4}p^2\beta^4.$$

La quantité caractéristique est

$$4m^3+27n^2=\frac{p\beta^2}{16}[27p\beta^2-8(\alpha-p)^3];$$

elle s'annule, lorsque

$$\beta=0, \quad \text{ou} \quad 27p\beta^2-8(\alpha-p)^3=0.$$

Donc lorsque le point P est sur l'axe de la parabole ou sur sa développée, deux des valeurs de z sont égales. Cette circonstance s'explique à priori : dans le premier cas, l'une des normales est PO et les deux autres, symétriques par rapport à PO, sont égales; dans le second cas, deux des normales coïncident.

Les trois valeurs de z sont réelles, lorsque

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3<0,$$

ce qui suppose le point P intérieur à la développée. Enfin, une seule valeur de z est réelle, lorsque P est extérieur à la développée.

Pour discuter les signes des valeurs de z, écrivons l'équation en z ainsi :

$$4z^3-8(\alpha-p)^2z^2-4(\alpha-p)T_1z+p\beta^2T_2=0, \qquad (A)$$

Digitized by Google

après avoir fait

$$T_1 = (\alpha - p)^3 - 9p\beta^2, \quad T_2 = 4(\alpha - p)^3 - 27p\beta^2.$$

Désignons par (T) la développée de la parabole, par (T_1) et (T_2) les courbes qui ont pour équations $T_1 = 0$, $T_2 = 0$. Ces trois lignes sont des paraboles semicubiques, ayant même axe et même point de rebroussement : (T_1) est intérieure à (T_2), et (T_2) intérieure à T.

Appliquons maintenant à l'équation (A) la règle des signes de Descartes. Lorsque P est intérieur à (T_1) (c'est-à-dire dans la région à droite de cette courbe), l'équation (A) a trois variations de signe ; donc les trois racines sont positives. Lorsque P est situé entre (T_1) et (T_2), deux valeurs de z sont positives et une est négative. La région entre (T_2) et (T_1) correspond à deux racines négatives et une positive. Enfin, lorsque P est extérieur à (T), deux valeurs de z sont imaginaires, et la troisième est positive, puisque T_2 est négatif.

Solutions analogues par MM. Bastin et Liénard.

Question 249.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 119.)

Trouver l'intégrale

$$\int \frac{[(x-1)^2 - (a+b+1)]\,dx}{(x^2+ax+b)\sqrt{x^2+bx+a}\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+bx+a}\right)}.$$

(D. Boen.)

Solution par M. E. Cesàro. La différence des trinômes x^2+ax+b, x^2+bx+a étant $(a-b)(x-1)$, on peut poser

$$x^2+ax+b = (x-1)(a+z), \quad x^2+bx+a = (x-1)(b+z),$$

d'où

$$[(x-1)^2 - (a+b+1)]\,dx = (x-1)^2\,dz.$$

L'intégrale proposée devient

$$\frac{1}{b-a}\left[\int\frac{dz}{z+a} - \int\frac{dz}{\sqrt{(z+a)(z+b)}}\right].$$

Après intégration et substitution, on obtient

$$\frac{1}{b-a}\log\left[(x^2+ax+b)\left\{\frac{\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+bx+a}}{x-1}\right\}^2\right] + C.$$

Digitized by Google

Cette formule est illusoire pour $b = a$; mais, dans ce cas, l'intégrale proposée est immédiatement ramenée à un type connu.

On arrive au même résultat, sous une forme un peu plus simple, en remarquant que l'intégrale peut s'écrire

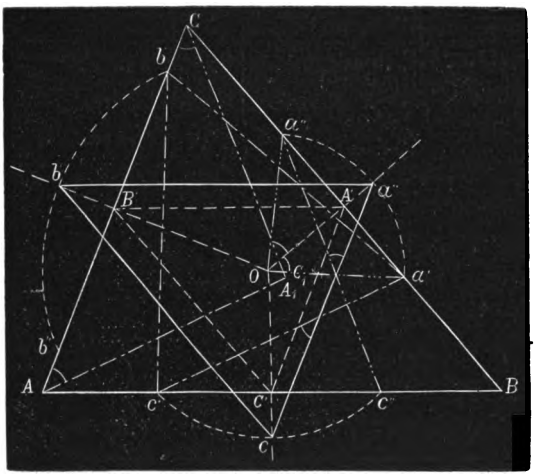
$$\frac{1}{b-a}\int \frac{dz}{t(\sqrt{t}+1)},$$

t étant égal au rapport $(x^2+ax+b):(x^2+bx+a)$. (D. Boen.)

×Question 274.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 215, t. V, p. 128.)

Si un triangle est inscrit à un triangle semblable, les projections de ses côtés sur les côtés homologues du triangle circonscrit sont respectivement égales aux moitiés de ces derniers côtés. (E. Cesàro.)



Première solution par MM. Gob, Henrard, Falisse (voir la figure ci-jointe). Soit le triangle $a'b'c'$ inscrit au triangle ABC et semblable à celui-ci. Les côtés homologues AB et $a'b'$, BC et $b'c'$, CA et $c'a'$ font entre eux un même angle φ.

Soient D le point de rencontre de CB et $c'b'$, E celui de $a'c'$ et AC; désignons aussi par A, B, C les angles des deux triangles ABC, $a'b'c'$, et par α, β, γ les côtés de $a'b'c'$. Les triangles $a'c'$B, c'Ab' donnent

$$c'\mathrm{B} = \frac{\beta \sin c'a'\mathrm{B}}{\sin \mathrm{B}}, \quad c'\mathrm{A} = \frac{\alpha \sin c'b'\mathrm{A}}{\sin \mathrm{A}}.$$

Mais, par les triangles Ca'E et b'CD, on voit que

$$c'a'\mathrm{B} = \mathrm{C} + \varphi, \quad c'b'\mathrm{A} = \mathrm{C}b'\mathrm{D} = \mathrm{C} - \varphi;$$

Digitized by Google

D'ailleurs,

$$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin C}.$$

Donc

$$c'B = \frac{\gamma \sin (C + \varphi)}{\sin C}, \quad c'A = \frac{\gamma \sin (C - \varphi)}{\sin C},$$

et, par suite,

$$AB = c'B + c'A = \frac{\gamma [\sin (C + \varphi) + \sin (C - \varphi)]}{\sin C} = 2\gamma \cos \varphi,$$

ce qui démontre le théorème proposé, $\gamma \cos \varphi$ étant la projection de $a'b'$ sur AB.

Deuxième solution par M. Gob. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle $a'b'c'$. Pour circonscrire à $a'b'c'$ un triangle semblable, on peut décrire sur $a'c'$, $a'b'$ des segments respectivement capables des angles b' et c', puis mener par a' une corde BC limitée aux deux circonférences et joindre Bc', Cb'. Les deux cercles $c'a'B$, $a'b'C$ sont évidemment égaux au cercle $a'b'c'$; donc leurs centres O_1, O_2 sont symétriques de O par rapport aux milieux B_1, C_1 des côtés $a'c'$, $a'b'$. Mais la droite O_1O_2, parallèle à B_1C_1, et double de B_1C_1, est aussi parallèle et égale à $b'c'$. Par conséquent, O_1O_2 et $b'c'$ ont même projection sur BC. Les centres O_1, O_2 se projettent aux milieux des cordes $a'B$, $a'C$; donc, etc.

Troisième solution, par M. Jeřábek. Le théorème est évident, lorsqu'on prend pour sommets du triangle inscrit les milieux A', B', C' des côtés du triangle circonscrit ABC.

Pour inscrire à ABC un autre triangle semblable à A'B'C', construisons un triangle quelconque abc homothétique à A'B'C' par rapport au centre O du cercle ABC, et plus grand que A'B'C'. De O comme centre, avec les rayons Oa, Ob, Oc, décrivons trois arcs de cercle coupant respectivement BC, CA, AB en (a', a''), (b', b''), (c', c''). Je dis que les triangles $a'b'c'$, $a''b''c''$ sont égaux à abc. En effet, à cause de

$$\frac{Oa}{OA'} = \frac{Ob}{OB'} = \frac{Oc}{OC'},$$

les triangles $OA'a'$, $OB'b'$, $OC'c'$, etc., sont semblables entre eux; par suite, les angles $a'OA'$, $b'OB'$, $c'OC'$, ... sont égaux. Il en résulte l'égalité des angles $a'Ob'$, aOb, puis celle des triangles $a'Ob'$, aOb et celle des côtés $a'b'$, ab, etc.

Menons maintenant la droite AA_1 égale et parallèle à $a'c'$. La ligne

Digitized by Google

A_1a' sera égale et parallèle à Ac', et aussi à $c''B$. Donc la figure $A_1a'Bc''$ est encore un parallélogramme, et A_1c'' est égale et parallèle à $a'B$, et aussi à $a''C$. On conclut de là que le quadrilatère $Ca''c''A_1$ est un parallélogramme. Donc $A_1C = a''c'' = a'c' = AA_1$, et le point A_1 est sur la perpendiculaire élevée au milieu de AC. Enfin, les projections de $a'c'$ et AA_1 sur AC sont égales à AB'.

Remarque. Tous les triangles inscrits à ABC et semblables à ABC, ont même point de concours des hauteurs O, qui est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Question 297.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 248.)

On sait que, si l'on fait tourner d'un certain angle λ, autour de son pôle, une spirale logarithmique, on obtient la développée de cette ligne. La spirale étant définie par l'angle V que fait la tangente avec le rayon vecteur, on demande de déterminer V de manière que λ soit un minimum. Chercher en outre cette valeur minima de λ. (E. Cesàro.)

Solution par M. Timmerhans. Soit

$$\rho = a^{\omega}$$

l'équation d'une spirale logarithmique S ; on aura

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{la}.$$

Le rayon de courbure en un point M de S est égal à la normale polaire MN ; donc les coordonnées polaires du centre de courbure N sont OM cot V et $MOX + \frac{\pi}{2}$. On en conclut l'équation de la développée

$$\rho = a^{\omega - \frac{\pi}{2}} la = a^{\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha},$$

pourvu que l'on fasse $la = a^{\alpha}$. Cette équation devient identique à celle de la spirale S, si l'on fait tourner celle-ci de l'angle

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{lla}{la} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} V . \log . \operatorname{tg} V.$$

Digitized by Google

Le minimum de λ correspond à

$$\frac{d\lambda}{d(\operatorname{tg} V)} = 1 + l \operatorname{tg} V = 0, \quad \operatorname{tg} V = \frac{1}{e} = \frac{1}{la}, \quad a = e^e$$

et a pour valeur $\frac{1}{2}\pi - e^{-1}$.

M. E. Cesáro a calculé les valeurs de V et λ. Il a trouvé $V = 20^0\,11'\,7''$, $\lambda = 68^0\,55'\,19''$.

×Question 372.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 200 et p. 231.)

a) Lorsqu'un prisme triangulaire tronqué a pour section droite un triangle équilatéral, le centre de gravité de la surface latérale se trouve au milieu de la droite qui joint le centre de gravité des arêtes parallèles au centre des moyennes distances des milieux de ces arêtes.

b) Lorsqu'un tronc de parallélipipède a pour section droite un carré, le centre de gravité de la surface latérale est situé sur la droite qui joint le centre de gravité des milieux des arêtes latérales au centre de gravité de ces quatre arêtes et aux deux tiers de cette droite à partir du premier de ces deux points. (J. Mister.)

Solution par M. Cl. Servais. *a*) Soient ABCA'B'C' le prisme tronqué; A'', B'', C'' les milieux des arêtes latérales; a, b, c les longueurs de ces arêtes. Les trapèzes ABB'A', BCC'B', CAA'C' qui composent la surface latérale, ayant même hauteur, nous pouvons représenter leurs poids par les quantités

$$a + b, \quad a + c, \quad b + c,$$

qui sont proportionnelles à leurs aires. On sait que le centre de gravité γ du trapèze ABB'A' divise la droite A''B'' en deux segments tels que

$$\gamma A'' : \gamma B'' = \frac{a}{2} + b : a + \frac{b}{2}.$$

Remplaçons le poids $a + b$ appliqué en γ par deux autres x et y appliqués en A'' et B''. Nous aurons

$$x + y = a + b, \quad x : y = \gamma B'' : \gamma A'' = a + \frac{b}{2} : \frac{a}{2} + b;$$

Digitized by Google

d'où

$$x = \frac{2}{3}\left(a + \frac{b}{2}\right), \quad y = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2} + b\right). \text{ (*)}$$

De même pour le trapèze BCC'B', nous aurons les poids

$$\frac{2}{3}\left(b + \frac{c}{2}\right), \quad \frac{2}{3}\left(c + \frac{b}{2}\right)$$

appliqués respectivement en B'' et C'', et pour le trapèze CAA'C' les poids

$$\frac{2}{3}\left(c + \frac{a}{2}\right), \quad \frac{2}{3}\left(a + \frac{c}{2}\right)$$

appliqués en C'' et A''.

Donc en définitive, on a :

$$\text{en A''} \cdots \frac{4}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \quad \text{ou} \quad a + \frac{a+b+c}{3};$$

$$\text{en B''} \cdots \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}a \quad \text{ou} \quad b + \frac{a+b+c}{3};$$

$$\text{en C''} \cdots \frac{4}{3}c + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \quad \text{ou} \quad c + \frac{a+b+c}{3}.$$

Les poids a, b, c donnent un poids résultant $a + b + c$ appliqué au centre de gravité G des arêtes AA', BB', CC'; les poids $\frac{a+b+c}{3}$ donnent un poids résultant $a + b + c$ appliqué au centre des moyennes distances G' des milieux des arêtes parallèles. Enfin, les poids appliqués en G et G' donnent un poids résultant appliqué au milieu de la droite GG'; donc c'est ce milieu qui est le centre de gravité de la surface latérale du prisme.

b) Considérons maintenant un parallélipipède tronqué ABCDA'B'C'D' ayant pour section droite un losange. On verra comme ci-dessus, que la détermination du centre de gravité de la surface latérale revient à composer les quatre poids suivants :

$$\frac{4}{3}a + \frac{b}{3} + \frac{d}{3} \text{ appliqué en A''},$$

(*) On arrive à la même conséquence en décomposant le trapèze en triangles, de deux façons différentes, par les deux diagonales, et en cherchant le centre de gravité de ces triangles au moyen de poids égaux au tiers de leur surface, placés aux trois sommets. (J. Mister.)

Digitized by Google

$$\frac{4}{3}b + \frac{a}{3} + \frac{c}{3} \text{ appliqué en B''},$$

$$\frac{4}{3}c + \frac{b}{3} + \frac{d}{3} \quad » \quad \text{C''},$$

$$\frac{4}{3}d + \frac{a}{3} + \frac{c}{3} \quad » \quad \text{D''}.$$

Les poids $\frac{4}{3}a$, $\frac{4}{3}b$, $\frac{4}{3}c$, $\frac{4}{3}d$ donnent un poids résultant $\frac{4}{3}(a+b+c+d)$ appliqué au centre de gravité G des arêtes latérales. La figure A''B''C''D'' étant un parallélogramme, les poids $\frac{4}{3}b + \frac{4}{3}d$ appliqués en A'' et C'', et les poids $\frac{4}{3}a + \frac{4}{3}c$ appliqués en B'' et D'' donnent un poids résultant $\frac{4}{3}(a+b+c+d)$ appliqué au centre G' du quadrilatère A''B''C''D''. Les poids en G et G' étant doubles l'un de l'autre, le point cherché divise la droite GG' dans le rapport 1 : 2.

Remarque I. Plus généralement : *Lorsqu'un tronc de prisme a pour section droite un polygone équilatéral, le centre de gravité de la surface latérale est situé sur la droite qui joint le centre de gravité des arêtes latérales au centre des distances proportionnelles des milieux de ces arêtes, le coefficient affectant chacun de ces points étant égal à la somme des deux arêtes voisines; de plus, il divise cette droite dans le rapport* 1 : 2.

Remarque II. Ce théorème général appliqué à un prisme triangulaire et la question 372*a* doivent donner le même résultat. On conclut, de là, cette proposition presque évidente :

Le centre de gravité des sommets d'un triangle chargés des masses quelconques a, b, c, et celui des mêmes sommets chargés des masses b + c, c + a, a + b sont en ligne droite avec le centre des moyennes distances du triangle; ce dernier point divise la distance des deux premiers dans le rapport 1 : 2.

×Question 406.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

ABC *étant un triangle rectangle en* A, *soit* φ *l'angle compris entre la médiane et la bissectrice menées par* B. *Démontrer que*

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} \text{B}. \qquad \text{(Tucker.)}$$

Cette question a été résolue par MM. Blondeel (Bruges), Boedt (Ypres),

Digitized by Google

CHOISIS, COLETTE, J. COLLIN, COUTURIAUX (Gand), DANIEL et DESCANS (Bruxelles), J. DEPREZ, FALISSE, GOB, HAUZEUR, HENRARD, LAURENS, MARYSSAEL, MEURICE, MINEUR, MINOLITI, PISANI, POILVACHE, RENSON, ROCHETTI. Cl. THIRY et VERNIORY.

Première solution. Soient BM la médiane, BD la bissectrice (D est entre A et M). On a

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\mathrm{ABM} - \mathrm{ABD}) = \frac{\operatorname{tg}\mathrm{ABM} - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{B}}{1 + \operatorname{tg}\mathrm{ABM}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{B}}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\mathrm{ABM} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\mathrm{B} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{B}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{B}}. \qquad (2)$$

Substituons la valeur (2) dans la formule, (1) etc.

Deuxième solution. Soient dans un triangle *quelconque* ABC, $\mathrm{ABM} = \alpha$, $\mathrm{CBM} = \gamma$. On trouve aisément

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\mathrm{A}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\mathrm{C}}; \quad \frac{\sin\alpha - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma} = \frac{\sin\mathrm{A} - \sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{A} + \sin\mathrm{C}};$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{C})}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{C})}.$$

Or

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \varphi, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}, \quad \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{C}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{B}}{2};$$

donc

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{C}).$$

Lorsque $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\pi$, on trouve la formule proposée.

NOTE. On conclut de là, un moyen d'obtenir graphiquement le cube d'un nombre (TUCKER, *Messenger of Mathematics*, t. XIV, p. 114 et *Educational Times*, janvier 1885). Pour la résolution graphique de l'équation $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\alpha$, on peut voir N. A. M., 1879 (2) XVIII, p. 376; N. C. M., 1876, II, p. 124; *Mathesis*, 1882, p. 51. Dans le problème de l'enveloppe d'une droite de longueur constante BC qui se meut entre les côtés d'un angle droit BAC, on rencontre la solution suivante de la même équation : Soient H la projection de A sur BC, et N le symétrique de H par rapport au milieu de BC; on a $\operatorname{tg}\mathrm{NAB} = \operatorname{tg}^3\mathrm{ABC}$. (J. N.)

Voir aussi N. A. M., 1844, (1) III, 111-119, 231-232; 1872, (2) XI, 141; N. C. M., 1880, VI, 94.

Digitized by Google

×Question 407.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

Soient A′, B′, C′ *les points de contact des côtés du triangle* ABC *avec le cercle inscrit* O, *de rayon r, et soient* R, R′, R″, R‴ *les rayons des cercles circonscrits aux triangles* ABC, BOC, COA, AOB; K *le point de concours des droites* AA′, BB′, CC′. *Démontrer les relations*

$$R'R''R''' = 2R^2r,$$

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{4R^3}{R'R''R'''} = \frac{2R}{r} = \frac{AK.BK.CK}{2.A'K.B'K.C'K}.$$ (Cl. Thiry.)

Cette question a été résolue par MM. Boedt, Colette, Couturiaux, Deprez, Falisse, Gob, Maryssael, Meurice, Mineur, Pisani, Rochetti, Thiry et Verniory. Nous allons résumer les solutions que nous avons reçues.

I. Les triangles BOC, COA, AOB ayant pour hauteur r, on a

$$R' = \frac{OB.OC}{2r}, \quad R'' = \frac{OC.OA}{2r}, \quad R''' = \frac{OA.OB}{2r};$$

d'où, en tenant compte de la formule connue $OA.OB.OC = 4Rr^2$:

$$R'R''R''' = 2R^2r.$$

On peut aussi se servir des égalités

$$R' = \frac{a}{2\sin BOC} = \frac{2R\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}, \quad \text{etc.}$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

la valeur de R′ peut se conclure de ce que le centre du cercle BOC est au milieu de l'arc BC de la circonférence ABC.

II. Les triangles OB′C′, OC′A′, OA′B′ ont avec ABC deux angles supplémentaires; donc

$$\frac{OB'C'}{ABC} = \frac{r^2}{bc}, \quad \frac{OC'A'}{ABC} = \frac{r^2}{ca}, \quad \frac{OA'B'}{ABC} = \frac{r^2}{ab}.$$

Par conséquent

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{r^2(a+b+c)}{abc} = \frac{2r^2p}{4R.ABC} = \frac{r}{2R}, \qquad (1)$$

Digitized by Google

et, en combinant ce résultat avec la première formule de la question,

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{R'R''R''}{4R^3}.$$

Pour achever la solution, il suffit de s'appuyer sur la question 338. (*Mathesis*, t. IV, p. 120 et 245).

La formule (1) résulte aussi de l'égalité

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{AB'.BC'.CA' + B'C.C'A.A'B}{AB.BC.CA},$$

applicable à un triangle quelconque A'B'C' inscrit à ABC.

Note. 1. MM. Couturiaux, Deprez et Thiry observent que les relations qui font l'objet de la question 407 s'appliquent aussi à un cercle exinscrit, pourvu que O, r désignent le centre et le rayon d'un tel cercle, et A', B', C' ses points de contact avec les côtés de ABC.

2. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle orthocentrique de A'B'C'; il est homothétique à ABC. Des égalités

$$ABC = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA)\,r,$$

$$A'B'C' = \tfrac{1}{2}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)\,r,$$

$$\frac{AB + BC + CA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1} = \frac{R}{\frac{1}{2}r}, \quad \frac{ABC}{A_1B_1C_1} = \frac{4R^2}{r^2}$$

on conclut aisément la formule (1) et celles-ci,

$$\overline{A'B'C'}^2 = ABC.A_1B_1C_1, \quad \overline{ABC}^2 = A'B'C'.O'O''O''', \qquad (3)$$

O', O'', O''' étant les centres des cercles exinscrits à ABC (comparer N. C. M., t. I, p. 195 et *Mathesis*, t. I, p. 72).

M. Thiry étend également les formules (3) aux cercles exinscrits et conclut, des relations bien connues entre R, r, r', r', r'', certaines propriétés des triangles ABC, A'B'C', $A_1B_1C_1$, etc.

×Question 408.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22)

Une sécante rencontre les côtés AB, AC *du triangle* ABC *aux points* B', C' *et la circonférence circonscrite aux points* M, N; *démontrer que les cercles* MBB', MCC' *se touchent en* M. (Clevers.)

Solution par MM. Blondeel, Choisis, Colette, J. Collin, Coutu-

Digitized by Google

RIAUX, DEPREZ, GOB, FALISSE, JERÁBECK, MEURICE, MINEUR, PISANI, PLEYERS, POILVACHE, THIRY, VERNIORY. Il suffit de prouver que les tangentes menées en M aux deux cercles MBB', MCC' font avec MN des angles égaux. Or ces angles sont respectivement égaux aux angles MBB' et MCC' qui, dans le cercle ABC, ont même mesure.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**441**. Soient a, b, c, d quatre droites quelconques d'un plan, et a', b', c', d' leurs symétriques par rapport à un axe quelconque XY du plan. Démontrer : 1° que les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle abc sur les côtés opposés du triangle $a'b'c'$ concourent en un même point δ ; 2° que ce point δ et les points analogues des triangles abd, acd, bcd sont sur une même droite.

(E. BLONDEEL, élève de l'Athénée de Bruges.)

×**442**. Soient, dans un quadrilatère sphérique complet, α, β, γ les trois diagonales et (A, A'), (B, B'), (C, C') les angles formés par les côtés aux extrémités des diagonales. Démontrer que

$$\sin A \sin A' \cos \alpha + \sin B \sin B' \cos \beta + \sin C \sin C' \cos \gamma = 0$$

(MAC-LELLAN.)

×**443**. Soient AD, BE, CF les hauteurs du triangle ABC, et X, Y, Z les projections de D, E, F respectivement sur CA, AB, BC. Démontrer que

$$\text{tang XYA} = \text{tang YZB} = \text{tang ZXC} = \text{tang A tang B tang C}.$$

(TAYLOR.)

×**444**. Soit A'B'C' le triangle formé par les symétriques d'une droite quelconque d par rapport aux trois côtés du triangle donné ABC.

1° Le triangle A'B'C' est de forme constante; 2° le centre du cercle inscrit à A'B'C' (exinscrit, lorsque ABC est obtusangle) appartient au cercle ABC; 3° quand la droite d se déplace parallèlement à elle-même, les points A', B', C' décrivent des droites; 4° quand la droite d est à une distance constante du point de concours des hauteurs de ABC, l'aire A'B'C' est constante; 5° les points A', B', C', décrivent des limaçons de Pascal. (J. NEUBERG.)

445. On joint un point fixe M d'une ellipse à deux points variables P, Q pris sur le grand axe à égale distance d'un point donné N; les

Digitized by Google

droites MP, MQ rencontrent l'ellipse en P′ et Q′. On propose 1° de démontrer que la droite P′Q′ passe par un point fixe R ; 2° de trouver le lieu décrit par R, lorsque M parcourt l'ellipse donnée. (J. NEUBERG).

446. A un cercle donné O, on inscrit un triangle quelconque ABC dont deux côtés AB, AC ont des directions invariables. Démontrer 1° que le point de concours des hauteurs, le centre du cercle des neuf points et les pieds des hauteurs BB′, CC′ décrivent des ellipses; 2° que la bissectrice de l'angle BAC et la hauteur AA′ enveloppent des hypocycloïdes(*).

×**447.** Sur les côtés du triangle ABC, on construit extérieurement trois triangles A′BC, AB′C, ABC′ semblables à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$; de même on construit extérieurement les triangles A″B′C′, A′B″C′, A′B′C″ semblables à $\alpha\beta\gamma$. Démontrer 1° que les circonférences circonscrites aux six triangles A′BC, A″B′C′, etc., passent par un même point O; 2° que les points A, A′, A″, O sont en ligne droite et que AA′ = AA″; 3° que les droites BC′ et B′C, CA′ et C′A, AB′ et A′B se coupent en trois points A‴, B‴, C‴ tels que les droites AA‴, BB‴, CC‴ concourent en un même point O′; 4° que les droites A′A‴, B′B‴, C′C‴, OO′ sont parallèles entre elles(**).

×**448.** Dans tout triangle ABC :

$$\sin^5 A \cos(B - C) + \sin^5 B \cos(C - A) + \sin^5 C \cos(C - A) = 3 \sin A \sin B \sin C.$$ (BRILL.)

×**449.** 1° Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les angles sous lesquels on voit d'un point intérieur P les côtés d'un carré ABCD. Démontrer les relations

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = (\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\gamma)^{-1} = 1.$$ (MILLER.)

2° On a la même formule, lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent les angles PAB, PCD, PBA, PDC. (SIMMONS.)

Rectifications. Page 103, ligne 8, lire *proposé*, au lieu de *proposée*. Page 106, le n° 12 doit être remplacé par ce qui suit : « La droite $\alpha'_1\beta_1$, est tangente à la parabole qui touche CA en A, CB en B ».

(*) Le lieu du centre du cercle des neuf points nous a été communiqué, avec une démonstration géométrique remarquable, par M. E. Blondeel. (J. N.)

(**) Nous avons déjà signalé, dans la *Revue de l'Instruction publique* et dans la N. C. M. les deux premières parties de cette proposition, qui sont des généralisations de propriétés connues dans le cas où le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral. Les deux autres parties sont dues à M. Morgan Jenkins. (J. N.)

Digitized by Google

SUR L'AXE CENTRAL ET L'AXE INSTANTANÉ GLISSANT(*),

par M. De Tilly, membre de l'Académie royale de Belgique.

1. Lorsqu'un corps solide passe d'une position à une autre, un point quelconque a, lié au corps, est remplacé, dans la position primitive qu'il occupait dans l'espace, par un autre point b; le point b est remplacé dans la sienne par un point c, etc.; donc, lorsqu'un corps solide passe d'une position à une autre position quelconque, il existe, pour chaque point a, appartenant au corps ou lié au corps, une ligne polygonale, plane ou gauche, abc ..., qui revient dans sa position primitive après le déplacement, chaque sommet ayant avancé d'un rang. Je l'appellerai la ligne polygonale des positions successives, ou, pour abréger, la ligne des positions.

Cette ligne polygonale jouit, à cause de la coïncidence possible de ses diverses parties, des propriétés suivantes : ses côtés sont égaux entre eux, ainsi que ses angles; de plus, si l'on mène tous les plans contenant deux côtés consécutifs, l'angle de deux plans consécutifs est constant(**).

Par un point quelconque de l'espace, menons des droites respectivement égales et parallèles aux côtés de la ligne polygonale des positions successives, et, de plus, dirigées dans le même sens que ces côtés, en suivant la ligne polygonale, de sommet en sommet, dans le sens abc ..., par exemple. A cause des propriétés précédentes, nous formerons ainsi un angle solide régulier, si nous matérialisons, par la pensée, les plans des faces; ou encore, en matérialisant également le plan de la base, nous formerons une pyramide régulière, dont la base pourra être étoilée, et pourra aussi ne pas se fermer.

(*) Cette note est une reproduction, complétée et améliorée, de certaines parties de trois notes antérieures (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, t. XXXV, 2e série, janvier 1873; *Nouvelle correspondance mathématique*, t. I, 1875; *Bulletin de l'Académie*, t. V, 3e série, mars 1883), où j'avais cherché à indiquer la preuve la plus intuitive de l'existence de l'axe central et de l'axe instantané, et, en quelque sorte, leur vraie raison d'être.

(**) Je pourrais, dès à présent, faire intervenir l'*axe* de cette ligne polygonale régulière, mais je préfère établir directement l'existence de cet axe, en n'employant que les propriétés les plus élémentaires de la droite et du plan.

Digitized by Google

Du centre de la base, menons des droites vers les différents sommets. Ces rayons seront les projections, sur le plan de la base, des arêtes de la pyramide, lesquelles sont des parallèles aux côtés de la ligne des positions successives.

Sur le même plan projetons ensuite, non plus les parallèles aux côtés de la ligne des positions, mais ces côtés eux-mêmes. Les projections seront respectivement parallèles et égales aux rayons dont nous venons de parler; mais, au lieu de passer par un même point, elles se placeront bout à bout et constitueront donc un nouveau polygone régulier, qui pourra être étoilé et pourra aussi ne pas se fermer.

Ce polygone, projection de la ligne des positions, reste le même avant et après le déplacement, et son axe représente, après comme avant, la droite unique équidistante de tous les côtés de la ligne des positions. Cette droite unique, considérée comme liée au corps, revient donc sur elle-même après le déplacement.

Donc, si l'on considère un même corps solide dans deux positions différentes quelconques, il y a toujours, dans ce solide, une droite dont la position n'a pas changé et qui est placée comme si elle n'avait fait que glisser sur elle-même, de manière que le corps peut passer de la première position à la seconde par un mouvement hélicoïdal autour de cette droite comme axe. C'est l'*axe central* des deux positions du solide.

Si un point était donné immobile, l'axe central contiendrait nécessairement ce point et ne serait plus qu'un axe de rotation, la translation étant nulle.

2. Lorsqu'un solide passe d'une position à une autre, le *déplacement rectiligne total* d'un point quelconque est représenté par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un côté de l'angle droit est égal au déplacement commun de tous les points, par la translation le long de l'axe central, et dont l'autre côté est la corde de l'arc décrit par le point considéré, dans sa rotation autour du même axe. Donc, pour que les déplacements totaux de deux points soient égaux, il faut et il suffit que les cordes en question soient égales, et, comme l'angle au centre est le même pour tous les points, cette condition revient à celle de l'égalité des rayons, c'est-à-dire que le lieu des points, dont le déplacement rectiligne total est égal à une longueur donnée, est un cylindre, dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe central des deux positions du solide.

3. Par un point quelconque, menons des droites respectivement paral-

Digitized by Google

lèles et égales à celles qui représentent les déplacements rectilignes totaux de tous les points du corps, et, de plus, dirigées dans le même sens que ces déplacements. Toutes ces droites devront se projeter suivant une seule et même longueur sur l'axe central, donc leurs extrémités se trouveront toutes dans un même plan perpendiculaire à cet axe.

Cette remarque permet d'obtenir la direction de l'axe central, lorsque l'on connaît les déplacements totaux de trois points du corps.

4. Une fois que la direction de l'axe central est connue, la position de cet axe peut s'obtenir en construisant les triangles rectangles dont il est question au n° 2, et pour chacun desquels on connait l'hypoténuse et la direction d'un côté de l'angle droit (parallèle à l'axe central). Par vérification, la longueur de ce côté sera la même dans tous les triangles. Dans chacun de ceux-ci, on mènera, par le milieu du troisième côté, corde de l'arc décrit autour de l'axe central), un plan perpendiculaire à ce troisième côté. Tous les plans ainsi obtenus se couperont suivant une même droite, qui sera l'axe central cherché. La même construction donne l'amplitude des deux mouvements de translation et de rotation.

5. Considérons un même point du solide, qui soit en A dans la position initiale et en B dans la position finale. Le solide peut évidemment être amené, de la première position dans la seconde, par une translation rectiligne pure, amenant de A en B le point considéré (que j'appellerai, dans la suite, ***point directeur***), suivie d'un autre mouvement, dans lequel le point directeur ne changerait plus de place, et pour lequel on peut choisir, d'après ce qui précède, une rotation pure autour d'un axe BC.

6. Or, le raisonnement du § 3 s'applique, sans modification, aux axes de rotation, tels que BC, ainsi obtenus. Soit, en effet, A′ la position initiale d'un point quelconque, lequel est amené en B′ par la translation AB, et dont la position finale est C′. Il est évident que les points B′ et C′ se projettent en un seul et même point sur l'axe de rotation BC; donc la projection du déplacement total A′C′, sur BC, est la même que celle de A′B′, ou de AB, sur le même axe. Ainsi les déplacements totaux de tous les points se projettent suivant une seule et même longueur sur l'axe BC. Donc la construction du n° 3 peut être employée pour trouver la direction de cet axe; et, comme cette construction donne un résultat unique, on en conclut que les divers axes de rotation, obtenus en prenant les divers points du corps comme points directeurs, sont parallèles entre eux et à l'axe central.

Digitized by Google

7. De plus, il est facile de voir que les déplacements angulaires autour de chacun de ces axes sont tous égaux. En effet, considérons, dans la position initiale, une droite perpendiculaire à l'axe central et, dans la position finale, la droite homologue à la première. Soit α l'angle de ces droites homologues.

Amenons le solide, de la première position dans la seconde, par une translation empruntée à l'un quelconque des points, suivie de la rotation nécessaire. Pendant la translation, l'angle α reste invariable.

La rotation qui doit compléter le déplacement se fait autour d'un axe parallèle à l'axe central, donc perpendiculaire aux deux droites homologues, lesquelles font toujours entre elles l'angle α.

Or, cette rotation doit faire coïncider les droites homologues, donc le déplacement angulaire correspondra à l'angle α, c'est-à-dire qu'il sera indépendant du point choisi comme point directeur.

8. Les déductions des nos 6 et 4 peuvent se remplacer, tout aussi simplement, par les suivantes : A étant, comme plus haut, le point directeur ; AB, la translation rectiligne; BC, l'axe de la rotation qui complète le déplacement; tous les points de la parallèle AD menée, par le point A, à la droite BC, subissent évidemment un déplacement rectiligne total égal à AB; donc AD est une génératrice du cylindre de révolution, lieu des points dont le déplacement total est AB, et, de plus, BC est une autre génératrice de ce même cylindre, donc l'axe du cylindre, c'est-à-dire l'axe central, est parallèle à BC. Ainsi les divers axes de rotation que l'on obtient, en prenant les divers points du corps comme points directeurs, sont parallèles entre eux et à l'axe central.

Puisque l'on connaît les points A et B et la direction de l'axe central (n° 3), on peut tracer les génératrices AD et BC, et la connaissance de ces deux génératrices d'un cylindre permet de construire un plan, perpendiculaire à celui qu'elles déterminent, et contenant l'axe du cylindre, c'est à dire l'axe central.

Répétant la construction pour autant de points qu'on voudra, tous les plans obtenus se couperont suivant l'axe central.

9. La notion de l'axe instantané glissant est évidemment plus complexe que celle de l'axe central, et ne peut être traitée sans invoquer l'idée de limite(*).

(*) Voir, à la fin de ce travail, une note trop longue pour être mise au bas des pages.

Digitized by Google

En effet, le théorème de l'axe glissant consiste, en réalité, en ce que les vitesses de tous les points d'un corps, à un instant donné, sont les mêmes que si on les déduisait d'un double mouvement de rotation autour d'un certain axe, et de translation simultanée dans la direction de ce même axe. Or, l'idée de vitesse implique celle de limite.

L'axe instantané glissant, est la limite vers laquelle converge l'axe central lorsqu'on fait repasser le corps de sa position finale à la position initiale (celle pour laquelle on veut déterminer l'axe glissant), par un mouvement absolument inverse de son mouvement primitif, et qu'à chaque instant on considère l'axe central, pris par rapport à la position initiale.

A chaque instant aussi, les directions des déplacements totaux et les vitesses moyennes (rapports de ces déplacements au temps) sont les mêmes, pour chaque point, que celles qui auraient résulté d'une rotation et d'une translation par rapport à l'axe central correspondant. Or, à mesure qu'on se rapproche de la position initiale, la direction du déplacement total et la vitesse moyenne convergent, pour chaque point, vers la direction et la grandeur de sa vitesse initiale. Celles-ci pourront donc aussi être déduites, pour tous les points, d'un double mouvement par rapport à l'axe central limite, et si l'axe central, au lieu de converger vers une limite à mesure qu'on revient vers la position initiale, se mettait à osciller, il en serait de même des vitesses initiales, tandis que celles-ci, par hypothèse, doivent au contraire être complètement déterminées.

10. On est donc en droit de paraphraser les numéros 2 à 8, en remplaçant partout le déplacement rectiligne total par la vitesse résultante; la translation le long de l'axe central, par la vitesse de translation suivant la direction de l'axe instantané glissant; la corde de l'arc décrit par la vitesse de rotation; l'angle au centre par la vitesse angulaire, etc.

11. Mais on peut aussi remplacer ce qui précède, ou tout au moins le ramener au simple mouvement d'un plan sur lui-même, par un raisonnement où la connexité entre l'idée de vitesse et celle d'axe instantané apparaît plus nettement encore.

Nous avons vu (n° 3) que si, par un point quelconque, on mène des droites respectivement parallèles et égales aux déplacements rectilignes totaux de tous les points, les extrémités de ces droites sont dans un même plan. Supposons que nous ayons exécuté cette construction après que le mouvement, d'ailleurs quelconque, aura duré pendant l'unité de temps.

Digitized by Google

Recommençons la construction, comme si nous voulions trouver l'axe central au bout d'une demi-unité de temps, mais en portant des longueurs doubles des déplacements totaux relatifs à ce temps, ce qui n'empêchera pas les extrémités d'être dans un même plan.

Continuons de même pour un quart d'unité de temps, avec des longueurs quadruples des déplacements, etc.

Les directions et les longueurs à construire successivement convergent vers des limites déterminées, qui représentent les vitesses initiales des points, en vertu de la définition même de ces vitesses.

Donc, les droites menées par un point, parallèlement aux vitesses de tous les points d'un corps, respectivement égales à ces vitesses, et dirigées dans le même sens, ont leurs extrémités dans un même plan.

Il en résulte immédiatement que toutes les composantes des vitesses, dans une direction perpendiculaire au plan dont il s'agit, sont égales, et par conséquent les vitesses elles-mêmes peuvent se déduire d'une translation parallèlement à cette direction, combinée avec le mouvement sur lui-même du plan en question (*).

NOTE.

J'ai dit ailleurs que l'axe instantané glissant est un cas particulier de l'axe central. C'est bien vrai, mais c'est le cas limite, et de là proviennent des difficultés particulières, si l'on veut traiter ce cas rigoureusement.

Ailleurs encore, j'ai fait le raisonnement suivant : « Si un corps solide se meut, un point quelconque a de ce corps est remplacé par un point b dans la position qu'il occupe; le point b par un point c, et ainsi de suite. Il résulte de là que dans le mouvement du corps, la ligne rigide abc... glisse sur elle-même. Or la seule ligne qui puisse glisser sur elle-même est l'héliee..... Dès lors, l'axe du cylindre de révolution auquel appartient cette hélice glisse sur lui-même... »

Cette explication de l'existence de l'axe instantané glissant, outre

---

(*) Ici, et dans les nos 5 à 8 (paraphrasés pour les rapporter à l'axe instantané glissant), on admet, au fond, la théorie du mouvement relatif, réduite à ce principe : Si deux systèmes de vitesses des points d'un solide sont compatibles avec la solidité, les résultantes géométriques de ces vitesses constituent encore un système compatible avec la solidité.

Digitized by Google

l'avantage d'être la plus intuitive de toutes, a encore celui de constituer, dans sa première partie (où il n'est question ni d'hélice, ni de droite), un principe antérieur à toute autre idée géométrique, sauf l'invariabilité des formes, c'est-à-dire des distances : c'est le principe d'après lequel il existe des lignes pouvant glisser sur elles-mêmes.

Mais, en revanche, il faut reconnaître que *ab*, *bc*, ... représentent, dans cette explication, des infiniment petits, ce qui ne peut jamais être admis que par abréviation de langage. Or, si l'on essaie de supprimer cette abréviation, on tombe dans des complications plus grandes qu'en déduisant la notion de l'axe instantané de celle de l'axe central.

Le principe de l'existence, à priori, des lignes glissantes, peut se décomposer en trois idées :

Celle du mouvement *actuel* d'un système invariable ; celle de la *persistance* de ce mouvement, pouvant rester identique à lui-même ; enfin celle de la *ligne glissante* proprement dite.

Je ne discuterai pas ici les deux premières idées. Je me bornerai à faire observer que la persistance du mouvement d'un système, auquel on peut, à la rigueur, rattacher tous les points de l'espace, n'a rien de commun avec la persistance du mouvement d'un point, idée inintelligible à priori, même quand on admet, comme il faut le faire, un système de comparaison auquel les mouvements sont rapportés.

Dans le mouvement persistant d'un corps, chaque point de ce corps, au moment où il arrive à une position quelconque dans l'espace (par rapport au système de comparaison), est assujetti à se mouvoir comme l'ont fait les points qui ont passé là avant lui, et, puisque le mouvement a pu commencer ainsi sans désagrégation du solide, il pourra continuer de même dans la suite du temps.

La notion première d'un pareil mouvement semble donc comprise dans la notion, en tout cas inévitable, du système solide ou de l'invariabilité des distances.

Or, une fois qu'on admet les deux premières des trois idées dans lesquelles j'ai décomposé la notion de la ligne glissante, la troisième s'établit rigoureusement.

Observons, pendant un certain temps, le mouvement continu du système et traçons deux lignes, l'une C_1, dans l'espace (c'est-à-dire, si l'on veut, formant corps avec le système de comparaison), représentant la trajectoire qu'un point A vient de décrire ; l'autre, C_2, dans le corps,

Digitized by Google

représentant le lieu des points qui, pendant le mouvement, ont successivement occupé la position que A occupait au début, dans l'espace.

Remettons le système en place (pour recommencer le mouvement), en laissant C_1 immobile, tandis que nous entraînons naturellement C_2 avec le corps. Dans le nouveau mouvement, identique au premier, A décrira de nouveau C_1, et comme tous les points de C_2 viendront successivement en A, ils se mettront aussi, à partir de là, à décrire C_1; donc, en résumé, C_2 glisse sur C_1, ou, en d'autres termes, glisse sur elle-même.

On voit donc, non seulement qu'il existe des lignes pouvant glisser sur elles-mêmes, mais, en outre, que dans ce mouvement persistant d'un corps, dont la notion semble découler immédiatement de celles de distance et de solidité, tous les points décrivent des lignes jouissant de la propriété dont il s'agit.

C'est le mouvement héliçoïdal, mais compris indépendamment de l'hélice, de la droite, et de toute autre idée géométrique.

×QUELQUES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES RELATIFS AU JEU DE DÉS,

par M. Weill, professeur au collège Chaptal, à Paris.

Problème I. *On a m lettres a, m' lettres b, ... $m^{(n)}$ lettres l, dans une urne. On en tire une, au hasard, puis on la remet; on recommence cette opération k fois de suite. On demande quelle est la probabilité pour que, dans l'ensemble de ces k opérations, on ait tiré, au moins une fois, la lettre a.*

L'ensemble de k opérations consécutives constitue un arrangement, avec répétition, des $(m + m' + \cdots + m^{(n)}) = S$ lettres données prises k à k. Le nombre des cas possibles est donc S^k. Le nombre des cas *défavorables* est $(S - m)^k$. Donc la probabilité est

$$P = 1 - \left(\frac{S - m}{S}\right)^k.$$

Applications. 1° *Probabilité pour amener au moins un double-six, en k épreuves consécutives, avec 2 dés à 6 faces.*

En jetant les dés, on peut obtenir les 36 résultats suivants :

11, 12, 21, 31, 13, ..., 66.

Posons

$$66 = a, \quad 65 = b, \quad 56 = c, \quad \text{etc.}$$

Digitized by Google

On aura alors 36 lettres $a, b, c, \ldots$ et en appliquant la formule générale, on voit que la probabilité cherchée est

$$P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k.$$

Il y aura avantage à parier pour le double-six, à partir de la valeur k la plus petite, qui vérifie l'inégalité

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k > \frac{1}{2},$$

d'où $k > 24$. Donc à partir du 25e coup, il y a avantage à parier pour le double-six. Ce résultat a été énoncé, sans démonstration, par PASCAL.

2° *Probabilité pour amener au moins un double-six avec* 3 *dés à* 6 *faces en k épreuves consécutives.*

On a ici un nombre de lettres différentes égal à $6^3 = 216$; parmi elles, il y en a 16 répondant à des solutions du problème, ce sont les lettres qui représentent les résultats suivants :

666	616	166
661	626	266
662	—	—
663	—	—
664	656	566
665		

donc la probabilité est

$$P = 1 - \left(\frac{200}{216}\right)^k = 1 - \left(\frac{25}{27}\right)^k.$$

3° *Même problème avec n dés à* 6 *faces.*

Il y a 6^n cas; les cas défavorables sont ceux où il n'y a pas de 6, leur nombre est 5^n; et ceux où il n'y a qu'un seul 6; leur nombre est $n \cdot 5^{n-1}$.

On a donc

$$P = 1 - \left[\frac{5^{n-1}(5+n)}{6^n}\right]^k.$$

4° *Probabilité pour amener avec n dés à* 6 *faces, p* six, SEULEMENT, *à la fois, en k épreuves consécutives.*

Considérons un arrangement avec répétition des 5 nombres 1, 2, 3, 4, 5 pris $(n-p)$ à $(n-p)$; dans chacun d'eux, introduisons, à des places

Digitized by Google

quelconques, p nombres 6 ; le nombre total des résultats ainsi obtenus est

$$C_n^p \cdot 5^{n-p};$$

donc, la probabilité cherchée est

$$P = 1 - \left[\frac{6^n - C_n^p \cdot 5^{n-p}}{6^n}\right]^k.$$

SUR LA COURBE DE WATT,

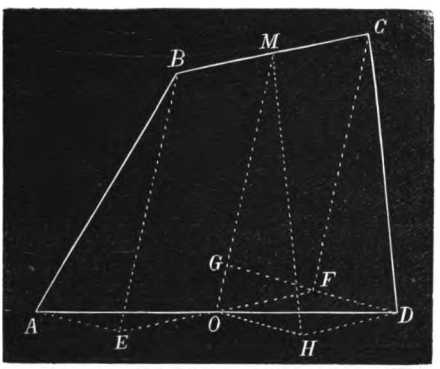
par M. E. Catalan, professeur à l'Université de Liège(*).

Problème. *Un quadrilatère* ABCD, *dont la base* AD *est fixe, et dans lequel les côtés* AB, CD *sont égaux, est articulé en* A, B, C, D. *Trouver l'équation du lieu décrit par le milieu* M *du quatrième côté.*

I. Lemme(**). *Si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux :* 1° *ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés*; 2° *la projection de chacun d'eux, sur la médiane, est égale à la médiane.*

1° Menons les droites BE, CF parallèles à la médiane MO; par le point O, menons EOF parallèle à BC. Enfin, traçons les droites AE, DF.

D'après la construction, BCFE est un parallélogramme ; donc BE = CF, OE = BM = MC = OF. Les triangles AOE, DOF sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Ainsi, AE = DF. De plus, ces droites sont *parallèles* ; car les angles OAE, ODF, *alternes internes*, sont égaux.



Par suite, les triangles ABE, DCF sont égaux, parce qu'ils ont les côtés égaux, chacun à chacun. Donc *angle* ABE = *angle* DCF.

(*) La présente Note, abstraction faite des Remarques, a été rédigée en avril 1872. Si je la publie, c'est parce que la *Société des Sciences de Bordeaux* vient de faire paraître un Mémoire intitulé : *Théorie du Parallélogramme de Watt.*

(**) Énoncé et démontré dans le premier volume de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (1874, pp. 31, 63, 161).

Digitized by Google

2° Les angles égaux AEB, DFC sont *supplémentaires*, à cause des situations respectives de leurs côtés. Donc *chacun d'eux est droit*. En même temps, *les droites* BE, CF *sont égales et parallèles aux projections, sur* MO, *de* AB, CD. Autrement dit, *ces* dernières *projections sont égales à la médiane*.

II. Équation de la courbe. Soient $AO = OD = a$, $AB = CD = b$, $BM = CM = c$. Soient en outre, $OM = u$, $MOD = \omega$.

A cause du triangle rectangle CFD,

$$u^2 = b^2 - \overline{FD}^2.$$

Pour évaluer FD, prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre, en G, avec OM. Il est clair que :

$$FD = DG - FG = a \sin\omega - FG, \quad FG = \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}.$$

L'équation demandée est donc

$$u^2 = b^2 - \left[a\sin\omega - \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}\right]^2,$$

ou

$$u^2 + c^2 - b^2 = a^2\cos 2\omega + 2a\sin\omega\sqrt{c^2 - a^2\cos\omega}. \qquad (1)$$

III. Remarques. 1° Cette équation (1) peut encore être écrite des trois manières suivantes :

$$(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - u^2)\sin^2\omega, \qquad (2)$$

$$(b^2 - u^2)^2 - 2c^2(b^2 - u^2) + (a^2 - c^2)^2 + 2a^2(b^2 - u^2)\cos 2\omega = 0, \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}^2\omega = \frac{(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2c^2 - (u^2 + a^2 + c^2 - b^2)^2}. \qquad (4)$$

2° Considérons le parallélogramme MCDH, dans lequel $MH = b$, $DH = c$. Si nous menons la droite OH, elle est perpendiculaire à OM (I, 2°). De là résulte le *dispositif* suivant, probablement *connu* et *peu pratique* :

La tige DH, *qui tourne librement autour du point fixe* D, *est articulée, en* H, *avec une seconde tige* HM. *Si les côtés d'un angle droit* HOM, *dont le sommet est fixe, glissent dans des ouvertures placées en* H, M; *l'extrémité* M *de la tige* HM *décrira la courbe de Watt.*

Liège, 11 juin 1885.

Digitized by Google

QUESTIONS DE LICENCE,

par M. H. BROCARD, capitaine du génie, à Montpellier

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 130).

XV. *Exprimer sous forme réelle l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^2y}{dx^2} = x. \qquad (1)$$

(PARIS; juillet 1883).

Deux nouvelles différentiations donnent $y^{VII} + y^{V} = 0$, équation qui admet pour caractéristique $r^5(r^5 + 1) = 0$; d'où

$$r = 0 \text{ (4 fois)}, \quad r = -1, \quad r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

L'intégrale de cette équation est donc

$$y = A + Bx + \frac{C}{2}x^2 + \frac{D}{6}x^3 + Ee^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(F\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + G\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

En substituant dans l'équation donnée (1), l'on trouve au second membre une quantité de la forme $C + Dx + \cdots$. On en conclut $C = 0$ $D = 1$, et l'intégrale cherchée est

$$y = A + Bx + \frac{x^3}{6} + C_1e^{-x} + C_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\right).$$

XVI. *Déterminer la courbe* C *de façon que le rayon vecteur* ρ *en un point quelconque* M *de cette courbe et l'arc* $s = AM$ *compté à partir d'un point fixe* A, *vérifient la relation*

$$s = \frac{\rho^2 + a^2}{a}, \qquad (1)$$

dans laquelle a désigne une ligne donnée. (PARIS; juillet 1883).

De l'équation (1), l'on tire

$$a\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2\rho\rho', \quad \frac{\sqrt{4\rho^2 - a^2}}{\rho}d\rho = \pm a d\omega.$$

Posant $2\rho\cos u = a$, il vient

$$\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}du = \pm d\omega,$$

d'où

$$C \pm \omega = -au\cos\frac{a}{2\rho} + \frac{\sqrt{4\rho^2 - a^2}}{a}.$$

(*A continuer*).

Digitized by Google

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Composition de Mathématiques (16 juin 1885).

Par les deux foyers d'une ellipse fixe on fait passer une circonférence variable.

1° *A quelle condition doit satisfaire cette ellipse, pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en 4 points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement 4 points réels d'intersection?*

2° *En chacun des points d'intersection, on mène les tangentes de l'ellipse. Ces 4 droites forment un quadrilatère. Quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?*

3° *Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère, symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?*

4° *On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Quel est le lieu de leurs points de contact avec le cercle?*

Solution par M. G. Boubals. 1° L'ellipse (E) et le cercle variable (C) ayant respectivement pour équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2\lambda y - c^2 = 0,$$

l'élimination de y donne l'équation bicarrée

$$c^4x^4 - 2a^2x^2\,[c^2(c^2 - b^2) - 2\lambda^2b^2] + a^4\,[(c^2 - b^2)^2 - 4\,\lambda^2b^2] = 0.$$

Les valeurs de x^2 sont toujours réelles; pour qu'elles soient positives et moindres que a^2, il faut et il suffit que l'on ait

$$c > b, \quad \lambda^2 < \frac{(c^2 - b^2)^2}{4b^2}. \tag{A}$$

L'équation aux ordonnées des points d'intersection est

$$c^2y^2 + 2\lambda b^2y - b^4 = 0, \tag{1}$$

et admet toujours deux racines réelles, y_1 et y_2 (*).

2° Deux des sommets du quadrilatère sont évidemment les pôles des

(*) Pour obtenir les conditions (A), on peut exprimer que les racines de (1) sont comprises, l'une entre 0 et b l'autre entre 0 et $-b$, ou que la substitution $y = \pm b$ rend le premier membre de (1) positif. (J. N.)

Digitized by Google

droites $y = y_1$, $y = y_2$ et décrivent l'axe des y. Leurs ordonnées sont $\frac{b^2}{y_1}$ et $\frac{b^2}{y_2}$. L'équation d'une tangente issue de ces points est

$$y - \frac{b^2}{y_1} - \frac{bx}{ay_1}\sqrt{b^2 - y_1^2} = 0, \qquad (2)$$

ou

$$y_1^2(a^2y^2 + b^2x^2) - 2a^2b^2yy_1 + b^4(a^2 - x^2) = 0,$$

et cette équation doit admettre pour racines y_1 et y_2, c'est-à-dire être identique avec l'équation (1). On en déduit

$$\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{c^2} = -\frac{2a^2y}{\lambda} = x^2 - a^2$$

ou

$$(c^2 - b^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2,$$

équation d'une hyperbole.

3° Le lieu des points d'intersection des côtés de deux quadrilatères symétriques se compose évidemment des deux axes de coordonnées. Pour avoir le lieu complet, formons les équations de deux tangentes symétriques (2) et

$$y_2^2(a^2y^2 + b^2x^2) + 2a^2b^2yy_2 + b^4(a^2 - x^2) = 0. \qquad (3)$$

On en déduit

$$y_1y_2(a^2y^2 + b^2x^2) + b^4(a^2 - x^2) = 0.$$

Mais de (1) l'on tire $y_1y_2 = -\frac{b^4}{c^2}$; donc il reste

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

équation du cercle décrit sur FF′ comme diamètre et tangent à l'hyperbole précédente.

4° La tangente à l'ellipse a pour équation

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Si elle passe au point (α, β) du cercle (C) et si elle est aussi tangente à ce cercle, on a

$$\beta = m\alpha \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad m = -\frac{\alpha}{\beta - \lambda}, \quad \alpha^2 + \beta^2 - 2\lambda\beta - c^2 = 0.$$

Éliminant m et λ, on trouve

$$\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)^2 - 4a^2\alpha^2\beta^2 - b^2(\beta^2 - \alpha^2 + c^2)^2 = 0,$$

équation qui se décompose en

$$\alpha^2 + \beta^2 + c^2 \pm 2c\alpha = 0, \quad \beta^2 - b^2 = 0,$$

Digitized by Google

et réprésente les deux foyers et les deux tangentes à l'ellipse aux sommets du petit axe.

Notes par M. H. Brocard. I. On reconnait aisément que les conditions (A) reviennent à dire que le cercle, passant par les foyers et tangent au sommet du petit axe, doit rencontrer la région opposée de l'ellipse et avoir son centre sur l'autre segment du petit axe.

II. La présence des foyers comme points du lieu 4° s'explique par le fait que les tangentes aux cercles (C) menées par les points F et F′ répondent à la question; quant aux tangentes à l'ellipse aux sommets du petit axe, elles donnent la signification géométrique, fort intéressante à remarquer et probablement nouvelle, de la construction du cercle tangent à une droite et passant par deux points. On en conclut ces propriétés de l'ellipse :

a) Les points où les tangentes à l'ellipse rencontrent les tangentes aux sommets du petit axe sont aussi les points de contact de ces tangentes aux deux cercles passant par les foyers de l'ellipse.

b) Les points de contact des cercles passant par deux points fixes et tangents à une droite fixe sont symétriques par rapport à l'intersection de cette droite avec celle qui joint les deux points donnés, et les projections de ces points sur la ligne des centres de ces deux cercles déterminent le petit axe d'une ellipse tangente à la droite donnée et admettant pour foyers les deux points donnés.

Le lecteur apercevra facilement d'autres conséquences géométriques à déduire de ces propositions, et par exemple, la solution des problèmes suivants :

1° Construire l'ellipse tangente à une droite donnée et ayant pour foyers deux points donnés ;

2° Déterminer le point de contact de la tangente ;

3° Déterminer le chemin minimum d'un foyer à l'autre en passant par un point de la droite donnée, etc., etc.

Composition de géométrie descriptive (17 juin 1885).

Un cercle de 10 centimètres de diamètre, situé dans un plan de front P, se projette horizontalement sur une parallèle aux petits côtés et à 11 centimètres du bas de la feuille. Son centre se projette verticalement sur la ligne qui divise la feuille en deux parties égales dans le sens de sa longueur, à 28 centimètres du bas.

Digitized by Google

On le prend comme cercle générateur de deux tores pleins ayant pour axes les tangentes à la circonférence en son point le plus à gauche et en son point le plus haut.

1° On tracera complètement l'intersection des deux surfaces, en indiquant les constructions effectuées pour en obtenir un point quelconque et la tangente en ce point.

2° On représentera par ses projections le solide commun aux deux tores, en retranchant la partie de ce solide située en arrière d'un plan de front, placé lui-même à 2 centimètres en arrière du plan P.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE DE ST-CYR.

Concours de 1885 (12 juin).

MATHÉMATIQUES (matin : 3 heures). I. On donne un angle droit XOY, un point A dont la distance à OY est a, et la distance à OX, b. Mener par ce point une sécante NAM telle que l'on ait $\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = k^2$. Discuter.

II. Quelles valeurs faut-il donner à x pour que la fonction $\frac{4x^4 - 20x^2 + 18}{x^4 - 5x^2 + 4}$ ait une valeur inférieure à 3.

III. Calculer les angles d'un triangle dont on donne les trois côtés : $a = 3645{,}43$, $b = 4156{,}28$, $c = 5047{,}56$.

ÉPURE (après midi : 2 1/2 heures). On donne dans le 1er dièdre un point A dont la cote $\alpha a'$ est 19^{mm}, l'éloignement αa est 22^{mm}, et un point G dont la cote $\gamma g'$ est 53^{mm}, l'éloignement γg est 48^{mm}, et dont la distance au plan de profil de A vers la droite est 52^{mm}. La droite AG est une diagonale du parallélipipède rectangle ABCDHGFEA dont une face est horizontale, une autre parallèle au plan vertical; trouver : 1° les projections du parallélipipède, 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite. Par les milieux M, N, P des trois arêtes DH, BC, EF on fait passer un plan, trouver les intersections de ce plan avec le parallélipipède, avec la sphère et les vraies grandeurs de ces sections. (Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant, et la portion du parallélipipède située au-dessous).

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 272.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 192.)

Étant données trois circonférences quelconques dans l'espace, construire une quatrième circonférence s'appuyant sur chacune des premières en deux points. (DARBOUX.)

Solution géométrique de M. SCHOUTE (*). Désignons par (A), (B), (C) les circonférences données, par α, β, γ les intersections des plans de ces lignes, deux à deux.

Si une circonférence s'appuie sur (A) aux points A', A'' et sur (B) aux points B', B'', les cordes communes A'A'', B'B'' se coupent sur la droite γ en un point F qui est d'égale puissance par rapport à (A) et (B). Ce point F se détermine par l'intersection de γ avec l'axe radical des cercles (A) et (B) ramenés dans un même plan par une rotation de l'un d'eux autour de γ, ou encore par l'intersection de γ avec le plan radical de deux sphères quelconques passant respectivement par (A) et (B). Il est donc unique, à moins que le plan radical des deux sphères ne passe par γ.

Réciproquement, tout plan mené par F rencontre (A) et (B) en quatre points (réels ou imaginaires) appartenant à une même circonférence.

Soient D et E les points des droites α, β par lesquels passent les plans des circonférences s'appuyant respectivement sur (B) et (C), (C) et (A). Si les côtés du triangle DEF rencontrent les circonférences (A), (B), (C) aux points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2, il est facile de voir que ces points sont sur une même circonférence. En effet, ces trois couples de points sont, deux à deux, sur trois circonférences, qui, si elles n'étaient pas confondues, auraient trois axes radicaux formant un triangle DEF.

La circonférence $A_1A_2B_1B_2$ satisfait donc au problème.

Il peut arriver que les côtés du triangle DEF ne rencontrent pas les circonférences données. Dans ce cas, on décrira dans le plan DEF, trois circonférences ayant pour centres les points D, E, F et pour rayons les

---

(*) Professeur à l'Université de Groningue (Hollande), auteur de plusieurs travaux remarquables qui ont paru dans le *Bulletin de Darboux*, le *Bulletin de l'Académie de Vienne*, etc.

Digitized by Google

tangentes menées de ces points à (B), (C), (A); la circonférence cherchée coupera orthogonalement ces circonférences auxiliaires.

Parmi les nombreux cas particuliers du problème 272, nous ne considérerons que celui où les points D, E, F coïncident avec le point d'intersection O des plans de (A), (B), (C). Il existe alors une infinité de plans passant par O et coupant les circonférences données en six points d'une même circonférence (X). Ces plans enveloppent un cône du second ordre, et les lignes (X) engendrent une cyclide (*).

×Question 339.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 120 et t. V, p. 18.)

Construire un triangle ABC *connaissant la hauteur* AH, *la médiane* AM *et le rapport* $\frac{c-b}{a}=\frac{m}{n}$.

Solution par M. le Dr Sum(**). On a démontré (*Mathesis*, t. IV, p. 68, question 247) que le cercle décrit de M comme centre avec le rayon $\frac{1}{2}(c-b)$ touche (sur la bissectrice de l'angle BAC) les cercles qui ont pour diamètres AC et AB. Cette propriété permet d'obtenir un triangle A'B'C' homothétique à ABC par rapport au point M. En effet, construisons avec les données de la question le triangle AHM, et prenons aussi sur MH une longueur $MC'=n$. Le cercle construit sur A'C' comme diamètre est déterminé par les conditions de passer par C', d'avoir son centre sur une parallèle à AM par le milieu de MC', et de toucher le cercle décrit de M comme centre avec le rayon m.

(*) Pour la cyclide, on peut consulter l'ouvrage « *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, par Darboux (1873) » et le mémoire « *On cyclides and sphero-quartics*, par Casey, inséré dans les *Philosophical Transactions* de 1871. A la page 593 de ce mémoire, on trouve l'énoncé suivant : « *Etant donnés trois cercles coupant orthogonalement une sphère dont le centre est à l'intersection des plans de ces lignes, l'enveloppe d'un cercle variable coupant les premiers cercles chacun en deux points est une cyclide.* »

(**) Nous avons oublié de mentionner une bonne solution de la question 378 par M. le Dr Sum.

Digitized by Google

Questions 341 et 350.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 142 et 143.)

341. *On donne un triangle* ABC, *on détermine sur les côtés de ce triangle trois points* A_1, B_1, C_1, *partageant respectivement les côtés, en suivant le même sens dans le rapport constant* k. 1° *Démontrer que le triangle* $A_1B_1C_1$, *a même centre de gravité que le triangle* ABC. 2° *Prouver que si* k *varie, les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$, *enveloppent trois paraboles.* 3° *Démontrer que ces paraboles se coupent deux à deux sur les médianes du triangle* ABC *aux points* P, Q, R. *Trouver les relations entre le triangle* PQR *et le triangle* ABC. 4° *Evaluer l'aire curviligne* PQR *commune aux trois paraboles.* (Barbarin.)

350. *On décrit les trois paraboles qui touchent deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième côté. Démontrer* 1° *que les foyers de ces courbes sont situés sur les médianes antiparallèles du triangle;* 2° *que les paraboles se coupent deux à deux sur les médianes et divisent ces droites dans le rapport* 1 : 8. (E. Lemoine.)

Solution de la question 341 *par M.* Minoliti. 1° Par hypothèse

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B}. \tag{1}$$

Soient A_2, B_2, C_2 et A_3, B_3, C_3 les milieux des côtés des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, G le point d'intersection des droites AA_2, B_1B_3. Menons C_1M parallèle à AC et rencontrant BC en M; nous aurons

$$\frac{C_1M}{AC} = \frac{BC_1}{BA} = \frac{BM}{BC}. \tag{2}$$

Mais les égalités (1) donnent aussi

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{BC_1}{BA} = \frac{CA_1}{BC}. \tag{3}$$

De (2) et (3), on déduit

$$C_1M = AB_1, \quad BM = CA_1, \quad A_2A_1 = A_2M.$$

Par conséquent la droite A_2B_3 est parallèle à C_1M et à AC, et égale à $\frac{1}{2}AB_1$. On conclut maintenant, des triangles semblables GB_3A_2 et GAB_1 :

$$GA_2 = \tfrac{1}{2}AG, \quad B_3G = \tfrac{1}{2}GB_1.$$

Digitized by Google

Donc G est le centre de gravité des deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ (*).

2° Si l'on fait varier k, les points A_1, B_1, C_1 décrivent trois ponctuelles semblables; donc les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 enveloppent trois paraboles α, β, γ. Lorsque C_1 coïncide avec B, B_1 se confond avec A; donc α touche BA en B. Par analogie, cette courbe touche aussi AC en C. Une position particulière de B_1C_1 étant B_2C_2, α touche aussi B_2C_2 en son milieu A_4.

Ainsi, les paraboles α, β, γ touchent deux côtés du triangle ABC aux extrémités du troisième, et touchent un côté du triangle $A_2B_2C_2$ en son milieu; les médianes AA_2, BB_2, CC_2 en sont des diamètres.

3° Soient Q, Q' les points où la médiane BB_2 rencontre respectivement la parabole α et la droite A_4C. La corde BQ est divisée harmoniquement par le point B_2 et sa polaire CA_4, de sorte que

$$\frac{QQ'}{QB_2} = \frac{BQ'}{BB_2}.$$

Mais, des triangles semblables BQ'C, $B_2Q'A_4$, on déduit

$$\frac{BQ'}{Q'B_2} = \frac{BC}{B_2A_4} = 4, \quad \frac{BQ'}{BB_2} = \frac{4}{5},$$

d'où

$$QB_2 = \tfrac{5}{4}\,QQ' = \tfrac{5}{9}\,B_2Q' = \tfrac{5}{36}\,BQ' = \tfrac{1}{8}\,BQ = \tfrac{1}{9}\,BB_2 = \tfrac{1}{3}\,B_2G.$$

Donc Q est le centre de gravité du triangle AGC.

On conclut aisément de là que les paraboles α, β, γ se coupent, deux à deux, aux centres de gravité P, Q, R des triangles BGC, CGA, AGB,

4° Les côtés du triangle PQR étant les tiers de ceux de ABC, son aire est égale à $\frac{1}{9}$ ABC.

Cherchons maintenant l'aire du segment parabolique QA_4R. Elle vaut les $\frac{2}{3}$ du triangle rectiligne QA_4R dont la base est les $\frac{2}{5}$ de B_2C_2 ou le $\frac{1}{5}$ de BC, et dont la hauteur est le tiers de celle du triangle GB_2C_2 ou le $\frac{1}{18}$ de celle de ABC. Donc le segment parabolique a pour valeur

$$\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{18}\ \text{ABC} = \tfrac{2}{81}\ \text{ABC}.$$

(*) La démonstration de M. Minoliti (donnée à peu près dans les mêmes termes par MM. Lambert et Falisse) est remarquable. On en déduit : 1° Que les milieux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$, lorsque k varie, se meuvent sur les droites B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2; 2° que le milieu d'une tangente mobile d'une parabole, limitée à deux tangentes fixes décrit une droite. La première partie de la question 341 est susceptible de généralisation. Voir *Nouvelle Correspondance*, t. VI, pp. 474 et 512.

Digitized by Google

Les segments curvilignes RB_4P, PC_4Q ont la même aire. Par suite, la surface $PC_4QA_4RB_4P$ commune aux trois paraboles a pour mesure

$$\tfrac{1}{9}\,ABC + 3.\tfrac{2}{81}\,ABC = \tfrac{5}{27}\,ABC.$$

NOTE. M. Pisani a résolu la même question. Pour la 3e partie, il se sert de l'équation de la parabole α. Si l'on prend pour axes de coordonnées AB et AC, la droite B_1C_1 a pour équation

$$\frac{x}{AC_1} + \frac{y}{AB_1} - 1 = 0$$

ou, à cause de $AC_1 = \dfrac{k}{k+1}AB$, $AB_1 = \dfrac{1}{k+1}AC$,

$$\frac{k^2 y}{AC} + k\left(\frac{x}{AB} + \frac{y}{AC} - 1\right) + \frac{x}{AB} = 0.$$

L'enveloppe de B_1C_1 est donc représentée par

$$\left(\frac{x}{AB} + \frac{y}{AC} - 1\right)^2 - \frac{4yx}{AB.AC} = 0.$$

Son intersection avec la droite BB_2, dont l'équation est $\dfrac{2y}{AC} + \dfrac{x}{AB} = 1$, a pour coordonnées $x = \frac{4}{9}AB$, $y = \frac{4}{9}AC$.

Solution analogue par MM. GOB, FALISSE et LAMBERT.

Solution de la question 350 *par M.* PISANI. Les paraboles que l'on considère dans cette question sont les mêmes que celles de la question 341. La seconde partie dont l'énoncé doit être rectifié a donc déjà été démontrée.

Pour la première partie, il suffit de s'appuyer sur le théorème suivant : *Si par un point* A, *on mène deux tangentes* AB, AC *à une parabole, le rayon vecteur* AF *et le diamètre* AA_2 *sont également inclinés sur la bissectrice de l'angle* BAC.

NOTE. De nombreuses propriétés des paraboles α, β, γ ont été signalées par M. Artzt (*Programme du gymnase de Recklinghausen*, 1884). Les foyers de ces courbes sont situés à l'intersection des symédianes avec le cercle de Brocard du triangle ABC(*).

MM. BROCARD, LIÉNARD et FALISSE ont également résolu la

(*) Voir à ce sujet, les numéros d'avril, de mai et de juin 1885 du *Journal de Bourget* (Math. spéc.) et les numéros de mai des N. A. M. et de *Mathesis*, p. 106.

Digitized by Google

question 350. Nous croyons utile de rapporter les solutions analytiques de la seconde partie de la question.

a) En prenant pour coordonnées les distances d'un point aux trois côtés du triangle ABC, on peut représenter la parabole touchant AB, AC aux points B et C par l'équation $\lambda\alpha^2 + \beta\gamma = 0$. Si l'on élimine α entre cette équation et celle de la droite à l'infini $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ et qu'on écrive la condition aux racines égales, on trouve $a^2 + 4bc\lambda = 0$. Par conséquent, les trois paraboles ont pour équations

$$a^2x^2 - 4bc\beta\gamma = 0, \quad b^2\beta^2 - 4ca\gamma\alpha = 0, \quad c^2\gamma^2 - 4ab\alpha\beta = 0.$$

Les deux premières équations donnent, par soustraction :

$$(a\alpha - b\beta)(a\alpha + b\beta + 4c\gamma) = 0.$$

L'une des cordes communes aux courbes correspondantes est donc représentée par $a\alpha - b\beta = 0$; par suite, elle se confond avec la médiane partant de C. Si on cherche son intersection avec l'une des courbes, on trouve

$$a\alpha = b\beta = 4c\gamma.$$

On en déduit que le point de rencontre divise la médiane dans le rapport 1 : 8 (Brocard) (*).

b) Si l'on prend pour axes de coordonnées AB et AC, la parabole touchant ces droites en B et C, et la médiane issue de B ont pour équations

$$\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \quad \frac{x}{c} + \frac{2y}{b} = 1.$$

Le point d'intersection de ces lignes a pour abscisse $x = \frac{4}{9}c$; donc il divise la médiane dans le rapport 1 : 8 (Fr. Falisse).

Rectifications. Page 126, lignes 2 et 3 en remontant, lire p, au lieu de cp.

(*) M. Brocard a étudié les mêmes paraboles dans le *Journal de Bourget* (Mathématiques spéciales), 1885.

On peut appliquer à ces lignes le théorème suivant que nous avons énoncé dans les *Wiskundige Opgaven* : « Les trois coniques qui touchent deux côtés d'un triangle ABC aux extrémités du troisième et qui un point commun (ou une tangente commune), ont encore deux autres points communs (ou deux autres tangentes communes) imaginaires. » Les paraboles α, β, γ ont donc deux tangentes communes imaginaires se coupant au centre de gravité de ABC. (J. N.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**450.** Les perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné ABC, aux points où ils sont rencontrés par une transversale quelconque d, forment un nouveau triangle A'B'C'. Démontrer: 1° que les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point M commun aux circonférences ABC, A'B'C', que celles-ci se coupent orthogonalement et que les droites de Simson de M par rapport aux deux triangles sont parallèles à d; 2° lorsque le triangle A'B'C' a une grandeur donnée, les sommets A', B', C' décrivent des circonférences et la droite d enveloppe une hypocycloïde. (J. Neuberg).

×**451.** On donne trois points en ligne droite A, B, C. Trouver géométriquement le lieu du point d'intersection de deux cercles égaux décrits respectivement sur AB et BC. (Gob.)

452. Sur les côtés AB et AC d'un triangle donné, on décrit deux cercles égaux de rayon variable. Trouver le lieu du second point d'intersection et l'enveloppe de la ligne des centres.

×**453.** Par le point de contact A de deux circonférences qui se touchent intérieurement, on mène deux sécantes quelconques ABC, AB'C' qui rencontrent les deux lignes en B, C, B', C'. Démontrer que les circonférences ABC', AB'C se coupent sur une circonférence fixe.

454. Soient A', B', C', D' les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un plan quelconque. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de A', B', C', D' respectivement sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont les génératrices d'un même hyperboloïde. (J. Neuberg.)

455. Le cercle osculateur en un point M d'une ellipse rencontre cette courbe en un point M_1; le cercle osculateur en M_1 rencontre l'ellipse en M_2, et ainsi de suite. On demande 1° d'examiner dans quel cas la ligne brisée $MM_1M_2M_3$ ... se ferme; 2° de démontrer que les enveloppes des droites MM_1, MM_2, MM_3, ... sont des projections orthogonales d'épicycloïdes. (J. Neuberg.)

×**456.** Soit A'B'C' un triangle circonscrit au triangle ABC. Trouver, par la géométrie élémentaire, le lieu d'un point M tel que deux des parallèles menées par M aux droites B'C', C'A', A'B' et limitées respectivement aux côtés des angles du triangle ABC soient égales entre elles. Conclure de là le point M pour lequel les trois parallèles sont égales entre elles. (J. Neuberg.)

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

197. Résoudre les équations

$$x^{\log x} = a, \quad a^{-c^{-a}} = b, \quad a^{-b^{-c^{-x}}} = d.$$

198. Démontrer que

$$3^{4n+2} + 2.4^{3n+1} = \mathcal{M}.\ 17,$$

$$3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} = \mathcal{M}.\ 17,$$

$$2^{8n+4} + 3^{2n+1} = \mathcal{M}.\ 19.$$

M. Fr. Falisse, qui nous a communiqué ces propositions, les démontre en écrivant les expressions sous la forme suivante :

$$9.81^n + 8.64^n = (17-8).81^n + 8.64^n = 17.81^n - 8(81^n - 64^n),$$
$$3.5.5^{2n} + 2.2^{3n} = (17-2)\,25^n + 2.8^n = 17.25^n - 2(25^n - 8^n);$$
$$16^{2n+1} + 3^{2n+1}.$$

199. Un cercle est inscrit dans un carré ABCD d'un mètre de côté. On trace le diamètre EF qui passe par les milieux E, F des côtés CD, AB. La droite EA rencontre le cercle en un point M que l'on joint au centre O. Quel est, en décimètres cubes, le volume du solide engendré par la révolution de la figure OMAF tournant autour de l'axe EF(*).

200. Les données restant les mêmes, chercher par application du théorème de Guldin, la situation du centre de gravité G de la figure OMAF et l'inclinaison de la droite OG sur la droite EF. (H. B.)

201. Trouver trois nombres x, y, z tels que les produits de chacun d'eux par la somme des deux autres soient égaux à

$$3417{,}4326; \quad 3108{,}4876; \quad 2139{,}1474(*).$$

Réponse : 51,42; 42,92; 23,11.

On peut donner une solution trigonométrique de cette question; voir N. C. M. t. II, p. 115-117 (H. B.).

202. Soient AA′, BB′, CC′, DD′ les distances des sommets d'un carré ABCD à une droite quelconque ; démontrer que

$$\overline{AA'}^2 + \overline{CC'}^2 - 2BB'.DD' = \overline{AB}^2.$$

203. Si une sécante rencontre deux cercles O, O′, qui se touchent intérieurement en A aux points (B, C), (B′, C′), les droites BB′, CC′ sont vues de A sous des angles égaux.

(*) École des sous-officiers de l'artillerie et du génie à Versailles; concours d'admission en janvier 1885.

Digitized by Google

QUESTIONS DE LICENCE;

par M. H. Brocard, capitaine du génie, à Montpellier.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 156).

XVII. *Intégrer l'équation différentielle du premier ordre*

(1) $$y'^3 - \tfrac{5}{2}y'^2 = (y-x)^2.$$ (Lille, nov. 1880.)

Seconde solution (voir *Mathesis*, t. II, p. 103-104). L'équation (1) peut s'écrire

$$y'^2(y' - \tfrac{5}{2}) = (y-x)^2.$$

On n'introduira que des carrés si l'on pose $y' - \frac{5}{2} = u^2$. Alors on a

$$(u^2 + \tfrac{3}{2})u = y - x.$$

Prenant la dérivée, il vient

$$u'(u^2 + \tfrac{3}{2}) + 2u^2u' = y' - 1 = u^2 + \tfrac{4}{2},$$

d'où,

$$u^2 = -\frac{1}{2}, \quad y' = 1, \quad y = x + \sqrt{-\frac{1}{2}},$$

solution singulière; puis

$$u' = \frac{1}{3}, \quad u = \frac{x+C}{3}, \quad y = \frac{3}{2}(x + C_1) + \left(\frac{x+C}{3}\right)^3.$$

En cherchant à vérifier l'équation (1), on reconnaît qu'il faut prendre $C_1 = \frac{1}{3}C$. Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{C}{2} + \left(\frac{x+C}{3}\right)^3.$$

Généralisation. La méthode exposée s'applique à l'équation

$$(y')^{m+1} - \frac{m+1}{m}(y')^m = (y-x)^m.$$

Si l'on fait $y' - \frac{m+1}{m} = u^m$, l'on trouvera

$$u^m = -\frac{1}{m}, \quad y' = 1, \quad y = x + \sqrt[m]{-\frac{1}{m}},$$

solution singulière; puis

$$u' = \frac{1}{m+1}, \quad u = \frac{x+C}{m+1}, \quad y = \frac{m+1}{m}x + \frac{C}{m} + \left(\frac{x+C}{m+1}\right)^{m+1}.$$

(*A continuer.*)

Digitized by Google

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS BARYCENTRIQUES AU MOYEN DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES ;

par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées.

1. La méthode des polaires réciproques permet de transformer les propriétés descriptives et les propriétés métriques, angulaires ou linéaires, des figures. Tout le monde connaît sur ce sujet les travaux classiques de Poncelet, Salmon, Mannheim, etc. ; il est inutile d'y insister.

Mais je ne sais si on a remarqué que la méthode se prêtait très aisément à la transformation d'une classe spéciale de propriétés(*), de celles où figure le centre des moyennes distances, ou le centre des distances proportionnelles d'un système de points, et que nous appellerons, pour cette raison, des *propriétés barycentriques*.

2. Nous prendrons, dans tout ce qui suit, pour conique directrice, un cercle de rayon égal à l'unité, et nous aurons le lemme suivant :

m étant la polaire d'un point M *par rapport au cercle directeur, si une droite, issue du centre* O *de ce cercle, coupe la droite m au point* A, *et que* P *soit le pied de la perpendiculaire abaissée de* M *sur* OA, *on a* $OA.OP = 1$.

En effet, la polaire *m* étant perpendiculaire à OM au point H, on a

$$\frac{OA}{OH} = \frac{OM}{OP},$$

d'où, si OT est un rayon du cercle convenablement choisi,

$$OA.OP = OH.OM = \overline{OT}^2 = 1. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Considérons alors une série de points M_1, M_2,.... M_p et leur centre M des moyennes distances ; nous avons

$$p.OP = OP_1 + OP_2 + \cdots + OP_p,$$

ou, d'après le lemme,

$$\frac{p}{OA} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \cdots + \frac{1}{OA_p}.$$

Cela ayant lieu d'ailleurs, quelle que soit la droite menée par le point O, on voit que la polaire du point M est l'axe des centres des

(*) Je n'ai du moins rencontré cette transformation dans aucun des ouvrages classiques où se trouve exposée la théorie des polaires réciproques.

Digitized by Google

moyennes harmoniques du point O par rapport aux polaires des points $M_1, M_2, \ldots M_p$.

Au terme d'*axe des centres des moyennes harmoniques*, employé par Poncelet, nous substituerons le terme plus court de *polaire*, dû à M. Laguerre, et nous énoncerons le théorème suivant :

THÉORÈME. *La droite corrélative du centre des moyennes distances d'un système de points est la polaire du centre du cercle directeur par rapport aux droites corrélatives des points de ce système.*

Il est bien évident que ce théorème subsiste encore lorsqu'au lieu d'un cercle on prend une conique pour courbe directrice.

On a une proposition analogue pour le cas du centre des distances proportionnelles; il est inutile de l'énoncer ici.

De là découle toute la transformation des propriétés barycentriques.

3. Nous allons en donner des exemples. Mais, auparavant, nous rappellerons quelques propriétés de la transformation par polaires réciproques, dont nous aurons à faire usage dans la suite.

A la droite de l'infini correspond le centre O du cercle directeur. Par conséquent :

A des droites parallèles correspondent des points en ligne droite avec O.

Aux asymptotes d'une courbe correspondent les points de contact des tangentes menées de O à la courbe corrélative.

Au centre d'une conique correspond la polaire du point O par rapport à la conique corrélative.

A une parabole correspond une conique passant par le point O.

A un cercle correspond une conique ayant un foyer au point O(*).

Au centre d'un cercle correspond la directrice de la conique corrélative, répondant au foyer placé en O.

Rappelons enfin que l'angle de deux droites est égal à l'angle des deux droites qui joignent leurs pôles au point O.

4. Passons maintenant aux applications du théorème énoncé plus haut, en mettant à la suite l'une de l'autre les propriétés connues et celles que ce théorème permet d'en déduire corrélativement.

(*) Car aux points imaginaires conjugués situés sur la droite de l'infini, et communs à tous les cercles du plan, correspondent deux droites imaginaires conjuguées perpendiculaires entre elles et issues du point O (droites isotropes).

Digitized by Google

I. Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point qui est le barycentre(*) des trois sommets du triangle.

Proposition corrélative. Les polaires d'un même point, par rapport aux côtés d'un triangle pris deux à deux, coupent les côtés opposés en des points qui sont sur une même droite. Cette droite est la polaire du point considéré par rapport aux trois côtés du triangle.

II. *Généralisation.* La droite qui joint le barycentre des points M_1, M_2, ... M_{n-1} au point M_n passe par le barycentre des points M_1, M_2, ... M_{n-1}, M_n.

Prop. corr. La polaire d'un point O par rapport à des droites m_1, m_2, ... m_{n-1} coupe une autre droite m_n au même point que la polaire du point O par rapport aux droites m_1, m_2, ... m_{n-1}, m_n.

III. Si une droite se déplace en restant parallèle à une direction fixe, le barycentre des points où elle rencontre une courbe algébrique donnée décrit une droite.

Prop. corr. Si un point P décrit une droite, la polaire d'un point fixe de cette droite par rapport aux tangentes que du point P l'on peut mener à une courbe algébrique donnée, passe par un point fixe.

IV. Les points de contact d'une courbe et de ses tangentes parallèles à une même droite ont pour barycentre un point fixe quelle que soit la direction de cette droite (CHASLES, *Aperçu historique*, p. 260 et 624).

Ce point fixe est le barycentre des points de rencontre mutuelle des asymptotes de la courbe (LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, T. IX, 1844, p. 337).

Prop. corr. Si une droite tourne autour d'un point fixe, la polaire de ce point par rapport aux tangentes à une courbe algébrique donnée, aux points où elle est coupée par la droite, est fixe.

Cette droite fixe est la polaire du point considéré par rapport aux droites qui joignent deux à deux tous les points de contact des tangentes menées de ce point à la courbe donnée.

V. Le barycentre des centres de courbure répondant aux points de contact d'une courbe et de ses tangentes parallèles à une direction donnée est le même que le barycentre de ces points de contact (DUHAMEL; voir dans le *Journal de Mathématiques*, un article de M. Liouville, t. VI, pp. 364 et 365).

(*) Pour abréger, nous remplaçons dans tout ce qui suit l'expression *centre des moyennes distances* par le terme de *barycentre*.

Digitized by Google

Prop. corr. Une droite D tournant autour d'un point fixe O coupe une courbe algébrique C en des points M_1, M_2, ... M_p. Les tangentes en ces points à la courbe C coupent aux points, M'_1 M'_2, ... M'_p la droite D' menée par O perpendiculairement à D. Les points M'_1, M'_2, ... M'_p décrivent une courbe C'. Le point O a même polaire par rapport aux tangentes à la courbe C en M_1, M_2,... M_p, et par rapport aux tangentes à la courbe C' en M'_1, M'_2,... M'_p.

VI. Le barycentre des points de rencontre de deux courbes est aussi le barycentre des points de rencontre des asymptotes de l'une avec l'autre, ou avec ses asymptotes (Liouville, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XIII, 1841, p. 412).

Prop. corr. La polaire d'un point O par rapport aux tangentes communes à deux courbes C et C' est aussi la polaire du point O par rapport aux tangentes menées à la courbe C par les points de contact des tangentes à la courbe C', issues de O, ou réciproquement; c'est aussi la polaire du point O par rapport aux droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de O à C aux points de contact des tangentes menées de O à C'.

La dernière partie de ce théorème a été énoncée par M. Laguerre (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. III, p. 176).

VII. Si divers triangles inscrits dans une conique sont circonscrits à une parabole, les barycentres des sommets de ces triangles sont situés sur une même ligne droite (Laguerre, *Bulletin de la Société mathématique*, t. V, 1877, p. 93 et Weill, N. A. M. (2), XIX, 1880, p. 369).

Si divers triangles circonscrits à une conique sont inscrits dans une autre conique K, les polaires d'un point quelconque de K par rapport aux trois côtés de ces triangles passent toutes par un même point.

VIII. Le lieu du barycentre des sommets d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques fixes est une conique homothétique à celle dans laquelle le polygone est inscrit (Weill, *Bulletin de la Société mathématique*, t. X, 1882, p. 139).

Corollaire : Si un polygone se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique, le barycentre de ses sommets décrit un cercle (Weill, *Ibid.*).

L'enveloppe de la polaire d'un point O par rapport aux côtés d'une polygone circonscrit et inscrit à deux coniques fixes est une conique

Digitized by Google

homologique de celle à laquelle le polygone est circonscrit, le centre d'homologie étant au point O.

Corollaire : Si un polygone se déplace en restant circonscrit à une conique de foyer O et inscrit dans une conique, la polaire du point O par rapport aux côtés du polygone enveloppe une conique de foyer O.

IX. Si un polygone se déplace en restant inscrit dans un cercle et circonscrit à une conique ayant l'un de ses foyers au centre du cercle, le barycentre des sommets de ce polygone est fixe (WEILL, *Ibid.*).

Prop. corr. Si un polygone se déplace en restant circonscrit à un cercle C et inscrit dans un autre cercle, la polaire du centre du cercle C par rapport aux côtés de ce polygone est fixe.

X. Si un polygone se déplace en restant à la fois inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle, le barycentre des points de contact des côtés de ce polygone avec le second cercle est fixe (WEILL, *Journal de mathématiques*, 3e série, t. V, 1879, p. 268).

Prop. corr. Si un polygone se déplace en restant circonscrit à une conique et inscrit dans une autre conique, ayant un foyer commun avec la première, la polaire de ce foyer par rapport aux tangentes à la seconde conique, menées par les sommets du polygone, est fixe.

Je me bornerai à ces quelques exemples qui suffisent, je crois, à faire ressortir l'utilité du théorème énoncé au début de cette note, et qui peut conduire à un grand nombre de propriétés nouvelles des droites polaires.

5. Mais j'ajouterai une remarque sur l'application de ce théorème, à savoir, qu'il peut être pris à l'inverse et permet alors de déduire d'une proposition relative aux droites polaires, une proposition corrélative sur les centres de gravité. En voici un exemple remarquable :

Si, aux différents points où un cercle rencontre une courbe, on mène des normales à cette courbe, la polaire du centre du cercle relativement à ces normales est située à l'infini (LIOUVILLE, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, T. XIII, 1841, p. 412. Ce théorème a été démontré par M. Laguerre dans les N. A. M.(2), XVIII, 1879, p. 61).

Prop. corr. Si les tangentes communes à une courbe algébrique C et à un cercle de centre O touchent la courbe C aux points M_1, M_2, M_3, ... et si les droites menées par le point O perpendiculairement aux droites OM_1, OM_2, OM_3 ... coupent les tangentes correspondantes en M'_1, M'_2, M'_3, ..., le point O est le barycentre des points M'_1, M'_2, M'_3, ...

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

Théorèmes sur la parabole,

par C. BERGMANS, professeur à l'athénée royal de Gand.

(Suite, voir p. 95-96).

Deuxième Série.

DÉFINITION. Nous convenons d'appeler *antiparallèles* deux droites qui font avec l'axe de la parabole des angles supplémentaires(*).

XXV. Deux sécantes antiparallèles d'une parabole rencontrent cette courbe en quatre points qui se trouvent sur une même circonférence. Réciproquement, quand une circonférence rencontre la parabole en quatre points, les droites qui forment un couple de sécantes communes sont des antiparallèles.

Le produit des racines de l'équation en ρ (th. I), ou $AB \times AC = \frac{y'^2 - 2pa'}{n^2}$; or les deux sécantes antiparallèles font des angles supplémentaires avec l'axe; d'où $n' = -n$ et $AB \times AC = AB' \times AC'$, donc....

XXVI. Si d'un point A hors de la parabole on mène une tangente AN et la sécante antiparallèle AB'C', les trois points N, B', C' sont sur une même circonférence qui touche la parabole en N. Réciproquement, si par un point N de la parabole on mène une normale NI à cette courbe, et si d'un point quelconque I pris comme centre et avec le rayon IN on décrit une circonférence, celle-ci coupe la parabole en deux points B' et C'; et la corde B'C' sera l'antiparallèle de la tangente en N; de sorte que la direction de cette corde sera constante quelle que soit la position du point I sur la normale en N.

XXVII. Si par un point N de la parabole on mène la tangente NT et la corde antiparallèle NC', le point I de la normale qui se projette au milieu de la corde NC' est le centre du cercle osculateur au point N de la parabole.

Le point A vient en N, B' vient aussi en N, donc la circonférence a trois points consécutifs communs avec la parabole.

(*) L'illustre géomètre CHASLES a nommé ces droites *lignes conjointes*.

Digitized by Google

DÉFINITION. Nous appellerons *corde d'osculation* la corde NC′ commune à la parabole et au cercle osculateur.

XXVIII. Dans la parabole, la corde d'osculation est égale à quatre fois la tangente arrêtée à l'axe.

Soient Q le point où la corde d'osculation rencontre l'axe, et T le point où la tangente N rencontre l'axe; NC′ est parallèle à la tangente N′T menée par le point N′ symétrique de N par rapport à l'axe; donc le diamètre de la parabole mené par N′ passe au milieu K de NC′; d'où $NC' = 2NK = 4NQ = 4NT$.

XXIX. Le lieu géométrique des milieux des cordes d'osculation est une parabole ayant le même axe, le même sommet, mais un paramètre cinq fois moindre que celui de la parabole donnée.

Soit P le pied de l'ordonnée du point N et S le sommet de la parabole; soient x_1 et y_1 les coordonnées du point K milieu de la corde d'osculation NC′; on a $x_1 = SP + N'K = SP + 2PQ = 5SP$;

$$y_1^2 = \overline{NP}^2 = 2p\,SP, \quad \text{donc} \quad y_1^2 = 2\frac{p}{5}x_1.$$

XXX. La projection NF_1 du rayon de courbure NI sur la sécante focale NF menée du point N a une longueur double du rayon vecteur FN.

$$NI = \frac{NK}{\cos INK} = \frac{2NT}{\sin 2\alpha} = \frac{TM}{\sin\alpha} = \frac{2FN}{\sin\alpha} = \frac{2FN}{\cos FNM},$$

si M est l'intersection de la normale avec l'axe.

XXXI. Si par le point N on mène dans le cercle osculateur une corde ND parallèle à l'axe, $ND = 4FN$(*).

$ND = 2.NI.n = 4FN$, ou mieux, $ND = 2NF_1 = 4NF$, car ND et NF_1 sont deux cordes également inclinées sur le rayon NI.

XXXII. La droite FU perpendiculaire sur la corde focale NF divise en deux parties égales les rayons de courbure aux extrémités N et N_1 de la corde focale NFN_1; ou, ce qui revient au même, la droite qui passe par les milieux des rayons de courbure aux extrémités d'une corde focale quelconque, passe également par le foyer et par le pôle de la corde focale.

Conséquence immédiate de ce qui précède.

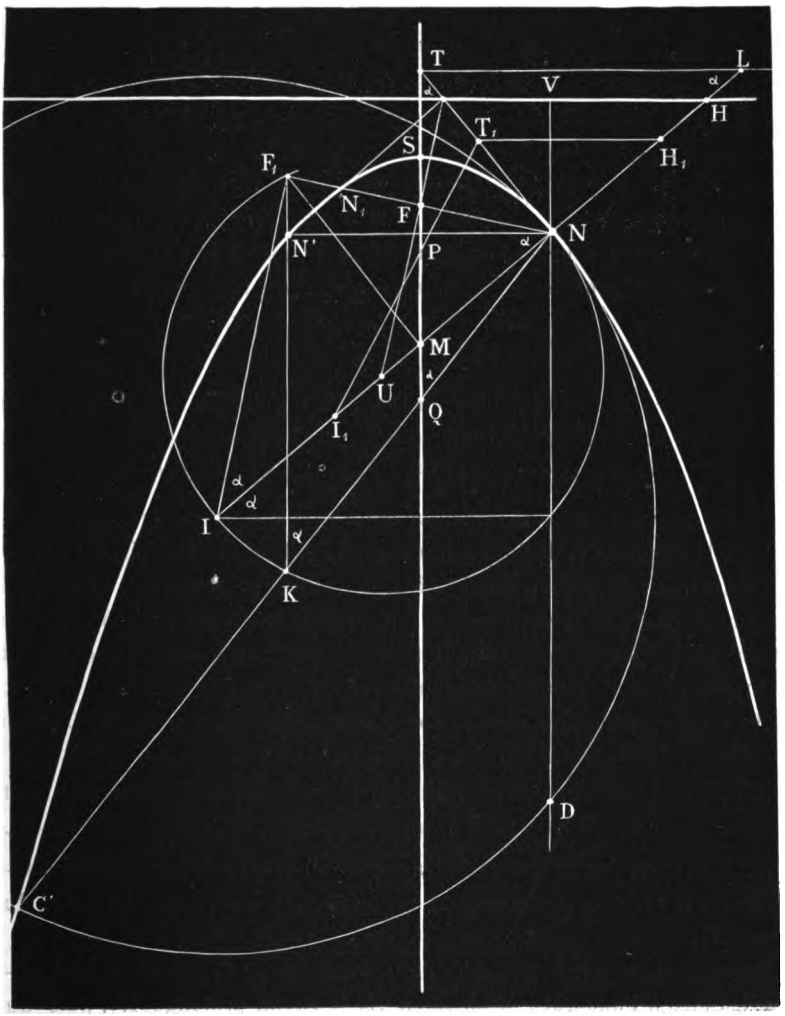
XXXIII. Les tangentes menées aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice, donc à angle droit; de sorte que la tangente en N_1 est parallèle à la normale en N.

(*) Je crois que ce théorème est dû à *Maclaurin*.

Digitized by Google

XXXIV. Au point T, on élève la perpendiculaire sur l'axe; soit L le point où elle rencontre la normale du point N; on a NL = MI.

Le triangle LTM est égal au triangle NF_1I ($TM = 2NF = NF_1$); donc ML = NI.



XXXV. *Expressions remarquables du rayon de courbure.* 1° Le rayon de courbure au point N de la parabole vaut deux fois le rayon vecteur

Digitized by Google

du point N divisé par le cosinus de l'angle que ce rayon vecteur FN fait avec la normale en N (th. XXX).

2° Le rayon de courbure au point N vaut la normale NM divisée par le carré du cosinus de l'angle que la normale fait avec l'axe.

$$NI = \frac{2NT}{\sin 2\alpha} = \frac{2NM \cot \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{NM}{\sin^2 \alpha} = \frac{NM}{\cos^2 NMT}.$$

3° Le rayon de courbure au point N de la parabole est égal au demi-paramètre p divisé par le cube du sinus de l'angle que la tangente en N fait avec l'axe.

$$NI = \frac{NM}{\sin^2 \alpha} = \frac{MP}{\sin^3 \alpha} = \frac{p}{\sin^3 \alpha}.$$

4° Le rayon de courbure au point N de la parabole s'obtient en divisant le cube de la normale NM par le carré du paramètre p.

$$NI = \frac{NM}{\sin^2 \alpha} = NM : \frac{\overline{MP}^2}{\overline{NM}^2} = \frac{\overline{NM}^3}{\overline{MP}^2} = \frac{\overline{NM}^3}{p^2}.$$

5° Le carré du rayon de courbure est égal à huit fois le cube du rayon vecteur NF divisé par le paramètre p.

$\overline{NM}^2 = 2p\overline{FN}$; $(NM^3)^2 = 8p^3\overline{FN}^3$; d'ailleurs $\overline{NM}^3 = p^2NI$, donc...

6° On a graphiquement la longueur du rayon de courbure en prolongement la normale NM d'une longueur NI égale à NL (th. XXXIV).

7° Au point M de la normale NM, on élève la perpendiculaire qui rencontre en F_1 le rayon vecteur NF prolongé; en F_1 on élève sur la droite NF_1 la perpendiculaire F_1I : elle rencontrera la normale du point N au point I, centre du cercle osculateur.

MF_1 est perpendiculaire sur NI, à cause de l'égalité des triangles LTM et NF_1I (th. XXXIII).

XXXVI. Les rayons de courbure en deux points de la parabole sont entre eux comme les cubes des normales en ces points (th. XXXV, 4°).

XXXVII. Si l'on prolonge le rayon de courbure IN jusqu'à sa rencontre en H avec la directrice, le segment NH n'est que la moitié du rayon NI.

En général, si par un point T_1 de la tangente en N on élève une perpendiculaire à l'axe qui rencontre en H_1 le rayon prolongé IN, puis du point T_1 la perpendiculaire à la polaire de T_1 qui rencontre le rayon NI en I_1, la distance H_1I_1 est égale au rayon de courbure IN.

Soit V le point de la directrice qui a la même ordonnée que le point N; les

Digitized by Google

triangles HNV et NIF_1 sont semblables et l'on a $NI : HN = NF_1 : NV = 2NF : NF = 2$. La seconde partie peut être démontrée facilement en prenant la tangente et la normale en N pour axes des coordonnées.

XXXVIII. En un point N de la parabole, on trace le rayon de courbure NI; la distance du centre I à la directrice est le triple de la distance du point N à la directrice.

XXXIX. Le lieu géométrique des foyers F des paraboles ayant en N un contact du second ordre avec un cercle de rayon NI, est la circonférence décrite sur NU (U est le point milieu de NI) comme diamètre. Les directrices de ces paraboles passent par un point fixe.

XL. Désignons par R_1 et par R_2 les rayons de courbure aux extrémités d'une corde focale quelconque; on a la relation

$$\left(\frac{1}{R_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R_2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}} (*).$$

$R_1 = \frac{p}{\sin^3 \alpha}$, d'où $\left(\frac{p}{R_1}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2 \alpha$ (th. XXXV, 3°); de même $\left(\frac{p}{R^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2 \alpha'$;

or $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha'$, donc $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha' = 1$. ...

XLI. La circonférence décrite sur le rayon de courbure NI comme diamètre :

1° Intercepte sur la sécante focale, à partir du point N, une longueur NF_1 double du rayon vecteur FN mené au point N;

2° Divise en deux parties égales la corde d'osculation NC';

3° La droite qui joint le point F_1 au point K milieu de NC' est parallèle à l'axe de la parabole, donc passe aussi par le point N' symétrique de N.

4° La corde d'osculation NC' = 4NT, etc., etc.

XLII. La développée de la parabole est la parabole *semi-cubique*.

$$p\beta^2 = \frac{8}{27} p (\alpha - p)^3$$

dans laquelle α et β sont les coordonnées du centre I.

$\alpha = p + 3\varpi$ (th. XXXVIII) et $\beta = -\frac{y^3}{p^2}$, car $-\beta + y = \frac{2FN}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{(2\varpi + p) 2\varpi}{y} = \frac{y^3}{p^2} + y$.

(*) On peut remarquer que p est le rayon de courbure au sommet de la parabole.

Digitized by Google

XLIII. La condition nécessaire et suffisante pour que les centres de courbure relatifs à trois points A, B, C de la parabole soient en ligne droite, c'est que la somme des inverses des ordonnées abaissées de ces points sur l'axe soit nulle, ou, ce qui revient au même, que la somme des coefficients angulaires des droites que joignent les points A, B, C au sommet de la courbe soit nulle.

Pour la première partie, il suffit d'exprimer que la surface du triangle formé par les trois centres de courbure est nulle ; la seconde se déduit immédiatement de la première, car $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=\frac{y_1}{2px_1}+\frac{y_2}{2px_2}+\frac{y_3}{2px_3}$.

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Sur l'interversion des facteurs dans un produit.* Les diverses démonstrations de ce théorème reposent toutes sur les mêmes idées fondamentales. En voici deux où ces idées sont combinées d'une manière assez originale. I. Si $Pab = Pba$, ou aussi $P(a+1)b = Pb(a+1)$, car l'une et l'autre de ces expressions est égale à Pab (ou Pba) $+ Pb$). Or, on a $P.1.b = P.b.1$, donc $P.2.b = P.b.2$, $P.3.b = P.b.3$, etc., et, enfin, $P.a.b = P.b.a$; d'où aisément le théorème général de l'interversion. II. Il est presque évident que pour multiplier un produit par un nombre, il suffit de multiplier par ce nombre, soit le multiplicande, soit l'un des autres facteurs. Par suite, de l'identité $1.1.1.1...1.1...1 = 1.1.1.1...1.1...1$, on déduit immédiatement $a.1.1.1...1.1...1 = 1.1.1.1...a.1...1$, puis $a.b.1.1...1.1...1 = 1.1.1.1...a.1...b$, etc., c'est-à-dire le théorème général. Ces ingénieuses remarques nous ont été communiquées par M. le capitaine commandant d'artillerie J. Saurel.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 192.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 230.)

Soient deux triangles ABC, A'B'C' *ayant un point* P *pour centre d'homothétie ; leurs côtés se coupent en six points qui sont sur une conique. Si* A'B'C' *varie,* P *restant fixe, les coniques circonscrites à cet hexagone sont homothétiques et, par suite, le lieu de leurs centres est une droite. Si* P *est le centre des médianes antiparallèles, cette droite passe par le*

Digitized by Google

centre du cercle circonscrit: on sait que la conique est alors un cercle. Enfin, P *étant quelconque mais restant fixe, et* A'B'C' *variant, la droite qui joint les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone passe par un point fixe.* (E. LEMOINE.)

Solution par M. P. BASTIN. Désignons par

C_a, B_a les points où B'C' rencontre AB, AC;
A_b, C_b » C'A' » BC, BA;
B_c, A_c » A'B' » CA, CB.

Soient α, β, γ les distances de P aux côtés du triangle de référence ABC, et (x, y, z) les distances d'un point quelconque à ces côtés. Les équations de B'C', C'A', A'B', sont respectivement,

$$x = m\alpha, \quad y = m\beta, \quad z = m\gamma,$$

m étant une constante. On peut supposer l'équation de B_cC_b sous la forme

$$py + qz - 1 = 0;$$

en exprimant qu'elle est vérifiée par les coordonnées de

$$B_c(y = 0, z = m\gamma) \quad \text{et} \quad C_b(z = 0, y = m\beta),$$

on trouve

$$q = \frac{1}{m\gamma}, \quad p = \frac{1}{m\beta}.$$

D'après cela, les équations des droites B_cC_b, C_aA_c, A_bB_a seront

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\gamma} - m = 0, \quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\alpha} - m = 0, \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - m = 0.$$

On voit immédiatement que ces lignes rencontrent respectivement BC, CA, AB aux mêmes points que la droite représentée par

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - m = 0.$$

Celle-ci, lorsque P (α, β, γ) est fixe et que A'B'C' varie avec m, se déplace parallèlement à elle-même.

L'hexagone $A_cA_bB_aB_cC_bC_a$ est inscriptible à une conique, car nous venons de voir que les côtés opposés se coupent sur une même droite. Cette courbe, si nous la considérons comme circonscrite au quadrilatère $A_cA_bC_bB_c$, a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - m\right) - n\left(\frac{y}{\beta} - m\right)\left(\frac{z}{\gamma} - m\right) = 0.$$

Digitized by Google

Les points où elle rencontre AB s'obtiennent en faisant $z = 0$; donc leurs coordonnées vérifient l'équation

$$\left(\frac{y}{\beta} - m\right)\left(\frac{x}{\alpha} + mn\right) = 0.$$

L'un de ces points est visiblement C_b; pour que l'autre soit C_a, il faut faire $n = -1$. Cette valeur de n est aussi celle qui exprime que la conique passe par B_c. L'équation de cette ligne est donc

$$\frac{xy}{\alpha\beta} + \frac{yz}{\beta\gamma} + \frac{zx}{\gamma\alpha} - m\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) + m^2 = 0(*).$$

On peut introduire les coordonnées cartésiennes en posant

$$x = X\cos\delta + Y\sin\delta - p$$
$$y = X\cos\delta' + Y\sin\delta' - p'$$
$$z = X\cos\delta'' + Y\sin\delta'' - p''.$$

Alors on verra que les termes du second degré ne renferment pas m : donc les coniques circonscrites à l'hexagone sont homothétiques, lorsque P reste fixe.

Si l'on observe que m n'entre que dans les termes du 1er degré, on voit facilement que le centre décrit une droite.

Question 218.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 47.)

Vérifier que

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2}{1-x^3)^2} + \cdots$$

Quelle est la limite commune? (E. Catalan.)

Première solution par M. E. Cesáro. 1. Ayant posé

$$u_{p,k} = \frac{x^p f_k(p)}{(1-x^p)^k},$$

considérons la somme

$$S_k = u_{1,k} + u_{2,k} + u_{3,k} + u_{4,k} + \cdots,$$

(*) Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{x}{\alpha} - m\right)\left(\frac{y}{\beta} - m\right)\left(\frac{z}{\gamma} - m\right) - \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} = 0. \qquad \text{(J N.)}$$

Digitized by Google

et ordonnons-la par rapport aux puissances croissantes de x. On sait que

$$u_{p,k} = [C_{k-1,k-1}\,x^p + C_{k,k-1}\,x^{2p} + C_{k+1,k-1}\,x^{3p} + \cdots]f_k(p).$$

Faisant varier p depuis 1 jusqu'à l'infini, et ajoutant, nous obtiendrons l'expression de S_k. Cherchons d'abord quel est, dans cette expression, le coefficient de x^n. La condition nécessaire et suffisante pour que x^n se trouve dans le développement de $u_{p,k}$ est que p soit égal à l'un des diviseurs $a, b, c, \ldots$, de n. Ainsi, x^n se trouve dans les développements de

$$u_{a,k},\quad u_{b,k},\quad u_{c,k},\quad \ldots,$$

et, par conséquent, son coefficient est

$$A_{n,k} = C_{k+\frac{n}{a}-2,k-1}f_k(a) + C_{k+\frac{n}{b}-2,k-1}f_k(b) + C_{k+\frac{n}{c}-2}f_k(c) + \cdots,$$

ou bien, en observant que les nombres $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \cdots$ sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $a, b, c, \ldots$,

$$A_{n,k} = C_{k+a-2,k-1}f_k\left(\frac{n}{a}\right) + C_{k+b-2,k-1}f_k\left(\frac{n}{b}\right) + C_{k+c-2,k-1}f_k\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

En résumé,

$$S_k = A_{1,k}\,x + A_{2,k}\,x^2 + A_{3,k}\,x^3 + A_{4,k}\,x^4 + \cdots.$$

2. Pour que l'on ait $S_k = S_1$, il suffit que $A_{n,k}$ égale $A_{n\,1}$, quel que soit n. En d'autres termes, on doit avoir, identiquement,

$$C_{k+a-2,k-1}f_k\left(\frac{n}{a}\right) + C_{k+b-2,k-1}f_k\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = f_1(a) + f_1(b) + f_1(c) + \cdots.$$

On satisfait à cette identité, en prenant

$$f_k(x) = 1,\quad f_1(x) = C_{k+x-2,k-1}.$$

Conséquemment

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^k} = \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{p+k-2,k-1}\,\frac{x^p}{1-x^p}.$$

Exemples :

$$\Sigma\frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \Sigma\frac{px^p}{1-x^p},$$

$$\Sigma\frac{x^p}{(1-x^p)^3} = \frac{1}{2}\Sigma\frac{p(p+1)x^p}{1-x^p},$$

$$\Sigma\frac{x^p}{(1-x^p)^4} = \frac{1}{6}\Sigma\frac{p(p+1)(p+2)x^p}{1-x^p},$$

. . . . . .

Digitized by Google

Seconde solution par M. E. Cesàro. Soient

$$A(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \cdots,$$
$$B(x) = b_1 x^{\beta_1} + b_2 x^{\beta_2} + b_3 x^{\beta_3} + \cdots$$

Ordonnons la somme

$$a_1 B(x^{\alpha_1}) + a_2 B(x^{\alpha_2}) + a_3 B(x^{\alpha_3}) + \cdots \qquad (1)$$

par rapport aux coefficients b. Il est évident que b_n se trouve multiplié par

$$a_1 x^{\alpha_1 \beta_n} + a_2 x^{\alpha_2 \beta_n} + a_3 x^{\alpha_3 \beta_n} + \cdots = A(x^{\beta_n}).$$

Il en résulte que la somme (1) est identique avec

$$b_1 A(x^{\beta_1}) + b_2 A(x^{\beta_2}) + b_3 A(x^{\beta_3}) + \cdots$$

Il suffit de supposer $a_n = 1$, $b_n = \alpha_n = \beta_n = n$, pour obtenir l'identité signalée par M. Catalan.

Troisième solution par M. Radicke, *professeur à Bromberg*. Soit

$$\varphi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots,$$

donc

$$\log \varphi(x) = \log(1-x) + \log(1-x^2) + \log(1-x^3) + \cdots$$

Si l'on développe en série les logarithmes et que l'on réunisse tous les termes ayant un même dénominateur, on obtient une seconde série pour $\log \varphi(x)$, à savoir.

$$\log \varphi(x) = -\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{2(1-x^2)} - \frac{x^3}{3(1-x^3)} - \cdots$$

En différentiant les deux expressions de $\log \varphi(x)$ par rapport à x et en tenant compte de la relation

$$\frac{d}{dx}\frac{x^p}{p(1-x^p)} = \frac{x^{p-1}}{(1-x^p)^2},$$

on trouve

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \cdots$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2}{(1-x^3)^2} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} + \cdots$$

et la limite commune des deux séries est $-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ (*).

(*) Dans l'une et l'autre solution on admet que l'on puisse intervertir l'ordre des termes des séries doubles considérées. M. Gillet a aussi résolu la quest. 218. (P.M.)

Digitized by Google

Question 285.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 231.)

Généralisation de trois propriétés de la cycloïde. Soit la courbe A*mb* *rapportée à des axes rectangulaires* A*x*, A*y*, *sur lesquels b se projette en p et g. Soit mt la tangente en un point quelconque de cette ligne, t étant le point d'intersection avec* A*x. Si l'on construit le parallélogramme mt*AM, *le lieu du sommet* M *est une courbe* AMB, *transformée de* A*mb. Cela posé, si* B *est le point de* AMB, *correspondant au point b de* A*mb* : 1° *Les figures* A*mbp*, AMB*q* *sont équivalentes.* 2° *Si ces figures tournent autour de* A*x, l'anneau engendré par la première, équivaut à la moitié de l'anneau engendré par la seconde.* (E. Catalan.)

Solution par M. Keelhoff. 1° Soient X, *y*, les coordonnées d'un point de AMB, correspondant au point (*x*, *y*) de A*mb*. On a

$$X = \frac{y}{y'} = y\frac{dx}{dy}, \quad \text{ou} \quad X\,dy = y\,dx.$$

Donc

$$\int_0^y X\,dy = \int_0^x y\,dx,$$

ce qui démontre la première propriété.

2° Considérons deux rectangles élémentaires correspondants $X\,dy$ et $y\,dx$, qui sont égaux. Le centre de gravité de $X\,dy$ a une ordonnée double de celle de $y\,dx$ a un infiniment petit près. Donc le volume engendré par $x\,dy$ est double de celui engendré par $y\,dx$: il en est de même des sommes de ces rectangles prises entre des limites correspondantes.

Solution par M. Brocard. Soient (*x*, *y*) les coordonnées de *m*, et X, *y*; celles de M. D'après la définition, X est égale à la sous-tangente de la courbe *m;* donc

$$X = \frac{y\,dx}{dy}, \quad X\,dy = y\,dx, \quad \int X\,dy = \int y\,dx,$$

ce qui démontre le premier théorème.

Le volume engendré par A*mbp* tournant autour de AX a pour expression

$$\pi \int y^2\,dx.$$

Digitized by Google

Le volume engendré par AMBq tournant autour du même axe est la différence entre le volume du cylindre engendré par le rectangle AQBq et le volume engendré par le triangle curviligne AMBP, BP étant l'ordonnée de B. Ce dernier a pour expression

$$\pi \int y^2 dX = \pi \int y^2 d\left(\frac{y dx}{dy}\right)$$

ou, en effectuant une intégration par parties,

$$\pi y^3 \frac{dx}{dy} - 2\pi \int y^2 dx.$$

Le terme intégré doit être pris entre les limites $x = 0$ et $x = AP$. A la première limite, il est nul; à la limite supérieure, il est égal au cylindre engendré par AqBP, car πy^2 sera la base et $y \frac{dx}{dy}$ la hauteur AP de ce cylindre. On a donc

$$\text{vol AMBP} = \text{vol A}q\text{BP} - 2 \text{ vol A}mbp,$$

ce qui démontre la seconde partie de la question.

Note. En 1840, Steiner (*Werke*, t. II, p. 169; *Bulletin mensuel de l'Ac. des sc. de Berlin*, 1840, p. 46) a énoncé les deux principes suivants comme pouvant servir à trouver l'aire de beaucoup de courbes (tractoires, podaires de coniques, etc.) :

1° Une droite a tourne autour de son extrémité fixe et une tangente b se meut le long d'une courbe plane convexe; si ses droites ont constamment la même vitesse angulaire et la même longueur, elles engendrent des aires égales.

2° Si trois droites, a, b, c tournent autour de leurs extrémités fixes avec la même vitesse angulaire et que leurs longueurs vérifient, à chaque moment, la relation $c^2 = a^2 + b^2$, l'aire engendrée par c reste égale à la somme des aires engendrées par a et b.

La première partie de la proposition de M. Catalan peut se déduire du premier des principes précédents. Car, si br est la tangente à la courbe Amb limitée à l'axe AX, l'aire AmbrA comprise entre la courbe Amb et les tangentes Ar, br est égale à l'aire comprise entre l'arc AMB et la corde AB. Ajoutant d'une part le triangle brp et d'autre part le triangle ABq qui est égal à brp, on aura les aires équivalentes Ambp, AMBq.

(J. N.)

Digitized by Google

Question 360.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 175.)

Trouver un plan sur lequel la projection orthogonale d'un ellipsoïde donné soit circulaire. (E. CATALAN.)

Solution par M. V. JAMET. La question revient évidemment à circonscrire à l'ellipsoïde donné un cylindre de révolution. Or, les seuls cylindres de révolution circonscrits à un ellipsoïde donné sont ceux dont les génératrices sont parallèles aux asymptotes des focales de l'ellipsoïde. La question comporte donc six solutions; quatre d'entre elles correspondent à *des plans imaginaires*, deux à des plans réels.

Voici d'ailleurs la solution analytique de la question. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

l'équation de l'ellipsoïde donné, rapporté à ses axes principaux. L'équation du cône circonscrit à cette surface et dont le sommet a pour coordonnées α, β, γ, est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)^2=0,$$

et si l'on suppose que α, β, γ, deviennent infinis, de telle sorte que $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ tendent vers des limites finies $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$, cette équation devient

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}\right)^2=0. \quad (1)$$

Telle est l'équation du cylindre circonscrit, dont les génératrices ont pour coefficients de direction u, v, w. Cherchons les conditions pour que ce cylindre soit de révolution.

1° Si les trois coefficients u, v, w sont différents de 0, on trouve, en appliquant les formules connues :

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)=\frac{1}{c^2}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)$$

et l'on en conclut que le problème est impossible.

2° Si $u=0$, on voit que dans l'équation (1) développée, les coeffi-

Digitized by Google

cients de xz et de xy sont nuls, et pour que le cylindre soit de révolution, il faut et il suffit que

$$\left[\frac{w^2}{b^2c^2}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\right]\left[\frac{v^2}{b^2c^2}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)\right]=\frac{v^2w^2}{b^2c^2}$$

ou après la suppression du facteur $\frac{1}{a^2}\left(\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)$,

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)-\frac{1}{b^2c^2}(v^2+w^2)=0,$$

ou encore, après réduction,

$$\frac{v^2}{b^2-a^2}-\frac{w^2}{a^2-c^2}=0.$$

Or, cette équation donne les directions asympotiques de la focale située dans le plan yOz. On trouverait de même les directions asymptotiques des deux autres focales.

Solution par M. VERSTRAETEN. Soit un ellipsoïde dont les demi-axes sont a, b, c et supposons que b soit le demi-axe moyen. Dans l'ellipse principale contenue dans le plan des deux autres axes, traçons un diamètre dont la demi-longueur c' soit égale à $\frac{ac}{b}$. Alors le cylindre circonscrit à l'ellipsoïde parallèlement à la direction de ce diamètre sera de *révolution* et, partant, la projection de la surface sur un plan perpendiculaire à cette direction sera un *cercle*.

Pour la démonstration, considérons un ellipsoïde, d'axes $2a, 2b, 2c$ inscrit à un cylindre de révolution. Soient $2a', 2b'$ les axes de la courbe de contact, et $2c'$ la longueur du diamètre de l'ellipsoïde parallèle aux génératrices du cylindre. Le diamètre $2b'$ étant perpendiculaire à a' et c' est un axe de l'ellipsoïde; supposons $b'=b$. Si θ est l'angle compris entre a' et c', on aura

$$b'=b, \quad a'c'\sin\theta=ac, \quad a'\sin\theta=b;$$

la dernière relation exprime que le cylindre est de révolution. De là on déduit $c'=\frac{ac}{b}$. Comme c' doit être compris entre a et c, b lui-même doit être compris entre a et c.

NOTE. Voir N. C. M. I (1re édition), p. 64 et 162 et *Mathesis*, V, 63-65. Steiner et Bobillier ont démontré, les premiers, que le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une quadrique se compose des courbes focales de cette surface. Ce théorème conduit immédiatement à la solution de la question 360.

Digitized by Google

×Question 409.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

Par un point quelconque M *du côté* BC *du triangle* ABC, *on décrit deux circonférences touchant respectivement,* AB *en* B *et* AC *en* C. *Trouver le lieu du second point d'intersection de ces circonférences.* (J. N.)

1° *Solution par MM.* Blondeel, Boedt, Choisis, Colette, Jules Collin, Deprez, Falisse, Fransolet, Gob, Henrard, Jeřabek, Laurens, Maryssael, Meurisse, Mineur, Poilvache, Renson, Sterken.

Si M est entre B et C, et que N soit le second point d'intersection des cercles, on a

$$\text{angle MNC} = \text{ACB}, \quad \text{angle MNB} = \text{ABC};$$

d'où BNC = 2 droits — BAC; donc le lieu est la circonférence ABC. On trouve le même résultat lorsque M est sur le prolongement de BC.

2° MM. Couturiaux et Cl. Thiry font dépendre la solution de la proposition suivante : Les circonférences circonscrites aux triangles que forment quatre droites AB, BC, CA, LMP prises trois à trois, se coupent en un même point. Il suffit de faire tourner LMP autour de M jusqu'à ce que cette droite coïncide avec BC.

3° MM. Boedt, Maryssael et Pisani ont donné la solution analytique suivante : En prenant pour axes de coordonnées BC et une perpendiculaire par B sur BC, et en posant BC = $2a$, BM = 2α, on trouve au moyen de deux triangles rectangles les ordonnées des centres et les rayons des deux circonférences, et, par suite, les équations de ces courbes :

$$(x - \alpha)^2 + (y + \alpha \cot B)^2 = \alpha^2 (1 + \cot^2 B),$$

$$(x - a - \alpha)^2 + (y + a - \alpha \cot C)^2 = (a - \alpha)^2 (1 + \cot^2 C).$$

Le paramètre α s'élimine aisément entre la première équation et l'équation de l'*axe radical;* on obtient

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay \cot A = 0.$$

×Question 420.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 47.)

Construire un triangle ABC *connaissant :* 1° *l'angle* A *et les droites menées par* A *qui divisent la base* BC *en parties proportionnelles à m, n, p;* 2° *la base* BC *et les points où cette base est rencontrée par les droites qui divisent l'angle opposé en trois parties égales;* 3° *le côté* BC *et les longueurs*

Digitized by Google

des droites BB′, CC′ *qui divisent* AC *et* AB *dans les rapports donnés* $m : n$, $p : q$.

1° *Solution par MM.* Blondeel, Boedt, Deprez, et Van den Broeck.

On peut d'abord construire un triangle $A_1B_1C_1$ semblable au triangle demandé; on divise une droite quelconque B_1C_1 aux points D_1, E_1 en segments proportionnels à m, n, p; sur B_1C_1 on construit le segment capable de l'angle donné A, et l'on cherche la circonférence, lieu des points dont les distances à D_1 et E_1 sont dans le rapport des longueurs données, etc.

Solution par MM. Couturiaux *et* d'Hondt. Soient AD, AE les droites qui divisent BC aux points D, E en parties proportionnelles à m, n, p. Si par E, on mène une droite parallèle à AD et rencontrant AC en F, AB en H, on aura

$$EF : AD = EC : DC = p : p + n, \quad EH : AD = m : m + n.$$

Donc les longueurs EF, EH se déterminent aisément. Cela posé, on prendra sur une droite à partir d'un même point, les longueurs EF, EH; on construira sur FH un segment capable de l'angle connu FAH, et de E comme centre, avec un rayon égal à EA, on construira une circonférence. Ayant ainsi déterminé le point A, on mène par A une parallèle à EF, égale à la longueur donnée AD et l'on joint ED.

2° *Solution par MM.* Blondeel, Boedt, Couturiaux, Deprez, d'Hondt et Van den Broeck. Si AD, AE sont les trisectrices de l'angle A, on aura

$$AB : AE = BD : DE, \quad AD : AC = DE : EC.$$

Le point A se déterminera donc par l'intersection de deux lieux géométriques : Soient D′ le conjugué harmonique de D par rapport à BE, et E′ le conjugué de E par rapport à DC; le point A est à l'intersection des circonférences décrites sur DD′ et EE′ comme diamètres.

3° *Solution par MM.* Boedt, d'Hondt et Van den Broeck.

Si l'on mène AB_1 et AC_1 respectivement parallèles à BB′ et CC′, et rencontrant BC en B_1 et C_1, on a

$$CB_1 : CB = m + n : m = AB_1 : BB'$$
$$BC_1 : BC = p + q : p = AC_1 : CC'.$$

Ces proportions feront connaître les côtés du triangle AB_1C_1, etc.

M. Couturiaux a donné une solution analogue, un peu moins simple que la précédente.

Solutions par MM. Blondeel et Deprez. Soit O le point d'intersection

Digitized by Google

de BB′ et CC′. Les triangles ABB′, ACC′ coupés respectivement par les transversales CC′, BB′ donnent :

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BO}{OB'}\cdot\frac{CB'}{CA}=1, \text{ etc.}$$

On peut donc trouver les longueurs BO et CO.

NOTE. Si l'on divise les côtés $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ d'un triangle quelconque $\alpha\beta\gamma$ aux points β', γ' dans les rapports $m : n$, $p : q$, les droites $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se partageront mutuellement dans les rapports BO : OB′, CO : OC′. (J. N.)

×Question 421.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 69.)

Démontrer que l'aire d'un triangle ABC *a pour expression*

$$\frac{(p-a)^2\sin A+(p-b)^2\sin B+(p-c)^2\sin C}{2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)}.$$

(CL. THIRY.)

Solution par MM. PISANI *et* GOB. Soient A′, B′, C′ les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de ABC. On a :

$$ABC=AB'C'+BC'A'+CA'B'+A'B'C',$$

$$AB'C'=\tfrac{1}{2}(p-a)^2\sin A,\quad BC'A'=\tfrac{1}{2}(p-b)^2\sin B,\quad \text{etc.};$$

$$A'B'C'=ABC.\frac{r}{2R}=ABC.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Par conséquent :

$$ABC=\tfrac{1}{2}(p-a)^2\sin A+\tfrac{1}{2}(p-b)^2\sin B+\tfrac{1}{2}(p-c)^2\sin C$$
$$+ABC.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Résolvons par rapport à ABC en tenant compte de la formule

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1, \text{ etc.}$$

Autres solutions par MM. BOEDT, DEPREZ, RENSON, ROCHETTI et VERNIORY.

×Question 431.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

Construire un quadrilatère, connaissant les projections du point de rencontre des diagonales sur les côtés. (BARBARIN.)

Solution par MM. BOEDT, J. COLLIN, GOB, HERREBAUT, MINEUR, HAUZEUR, MEURISSE, VERNIORY, CL. THIRY. Soient M, N, P, Q les pro-

Digitized by Google

jections du point de rencontre O des diagonales sur les côtés AB, BC, CD, AD, et soit S le point de concours de AB et CD (AD est supposé entre S et BC). Les quadrilatères OMAQ, OMBN, ONCP, OPDQ étant inscriptibles, on trouve aisément les relations suivantes entre les angles :

$$BSC = BAC - ACD = MQO - ONP,$$
$$BSC = BDC - DBA = OQP - ONM,$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$BSC = \frac{MQP - MNP}{2},$$

ce qui permet de construire la circonférence SMOP. On détermine de même la circonférence NOQ.

QUESTIONS PROPOSÉES.

457. Une parabole de grandeur invariable touche une droite donnée OX en un point fixe O. Trouver : 1° les lieux décrits par le foyer, le sommet et la projection de O sur l'axe ; 2° les enveloppes de l'axe, de la tangente au sommet et de la directrice.

458. La somme de deux cubes consécutifs n'est jamais un carré, excepté si ces cubes sont 1 et 8. (Ed. Lucas.)

459. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais un bicarré. (Ed. Lucas.)

×**460.** Par un point M, pris sur la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral, on abaisse les perpendiculaires aux côtés, et l'on détermine ainsi, sur les côtés, six segments. Si a, b, c sont trois segments non consécutifs, on a

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{bc + ac + ab} = \frac{5}{2}.$$ (E. Cesáro.)

461. L'enveloppe des circonférences qui ont pour diamètres les rayons de courbure d'une épicycloïde, est une courbe inverse de cette épicycloïde. (Mennesson.)

462. Une conique passe par quatre points fixes O, A, B, C. Trouver le lieu du centre du cercle osculateur au point O. (V. Jamet.)

463. Une conique passe par trois points fixes A, B, C et touche une droite fixe Ox en un point variable M. Lieu du centre de cercle osculateur au point M. (V. Jamet.)

Digitized by Google

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA MÉTHODE DES LIMITES.

Une quantité variable toujours croissante a une limite finie ou infinie.

1. *Distinction de deux cas principaux.* Lorsqu'une variable croît sans cesse, deux cas principaux peuvent se présenter : ou bien, elle croît en dépassant toute quantité donnée, ou bien elle reste inférieure à une certaine grandeur assignable M. Ainsi, par exemple, l'expression

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right),$$

étant plus grande que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2},$$

dépassera toute grandeur donnée, quand n croîtra indéfiniment. Au contraire,

$$E_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots n},$$

qui est inférieure à

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

ne dépassera jamais 3, quelque grand que soit n.

2. *Démonstration du principe dans le premier cas principal.* Si une variable X toujours croissante(*) dépasse toute grandeur donnée M, quelque grand que soit M, (1 : X) pourra devenir inférieur à une quantité (1 : M), si petite qu'elle soit; de plus, quand X continue à

(*) La variable X peut être commensurable ou incommensurable. Dans ce dernier cas, si l'on veut suivre de plus près la marche des idées dans la démonstration, il faut remarquer que X est compris par définition entre deux nombres entiers, N et N + 1, indéfiniment croissants et (1 : X) entre (1 : N) et [1 : (N + 1)]. Même observation dans le second cas.

Digitized by Google

croître, (1 : X) continue à décroître et reste, par conséquent, inférieur à (1 : M). Donc (1 : X) a pour limite zéro. Par définition, quand (1 : X) a pour limite zéro, on dit que X a une limite infinie. Par conséquent, dans le premier cas principal, le principe fondamental est démontré. EXEMPLE : H_n a une limite infinie.

3. *Second cas principal. Premier cas particulier.* Si une variable X toujours croissante reste inférieure à une grandeur donnée M, on peut distinguer deux cas particuliers : ou bien, il existera un premier nombre commensurable L non dépassé par X dans ses variations, ou bien, il n'en existera pas. Dans le premier cas, $L - X$ est une quantité qui n'est jamais nulle, puisque X n'atteint pas L. Cette différence devient aussi petite que l'on veut, puisque, par hypothèse, X dépasse toute quantité commensurable $L - \varepsilon$, inférieure à L, quelque petit que soit ε. Enfin, une fois que la différence $L - X$ est devenue plus petite qu'une quantité quelconque ε, elle reste plus petite que cette quantité, puisque $L - X$ décroît sans cesse, quand X croît. Par conséquent, d'après la définition du mot limite, on a $lim\ X = L$. EXEMPLE : La quantité

$$X = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

a pour limite 1 ; car 1 est le premier nombre commensurable non dépassé par X. Tout nombre commensurable $1 - \varepsilon$, si petit que soit ε, est dépassé par X, puisqu'il suffit, pour qu'il en soit ainsi, de prendre n assez grand pour que l'on ait $(1 : 2^n) < \varepsilon$.

4. *Second cas particulier.* S'il n'existe pas de premier nombre commensurable non dépassé par X dans ses variations, tous les nombres incommensurables peuvent être divisés en deux classes, les uns l_m dépassés, les autres L_n non dépassés par X. D'après les conventions de langage relatives aux nombres incommensurables, on dira que ces deux catégories de nombres commensurables sont séparées par un nombre incommensurable λ, limite commune des l_m et des L_n. La variable X ne peut dépasser λ ; car, si elle atteignait une valeur X′ supérieure à λ, elle dépasserait les nombres commensurables, en nombre indéfini, compris entre λ et X′, ce qui est absurde, puisque tout nombre supérieur à λ est de la classe des nombres L_n, que X ne peut atteindre. La variable X ne peut non plus atteindre la valeur λ, puisque, dans ce cas, en croissant

Digitized by Google

toujours, elle dépasserait λ, ce que nous venons de démontrer être impossible. Ainsi, en premier lieu, la différence $\lambda - X$ n'est jamais nulle. En second lieu, la différence $\lambda - X$ devient aussi petite qu'on le veut, puisque la différence plus grande $L_n - l_m$, des nombres commensurables L_n supérieurs à λ et à X, et des nombres l_m inférieurs à λ et dépassés par X, devient aussi petite qu'on le veut. Enfin, quand $\lambda - X$ a atteint un certain degré de petitesse et que X continue à croître, cette différence devient plus petite encore. Donc enfin $\lambda - X$ devient et reste aussi petit qu'on le veut sans s'annuler et, par conséquent, λ est la limite de X.

Exemple : La quantité

$$E_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

inférieure à 3 et croissante avec n, a une limite finie, que l'on désigne par la lettre e. Cette limite est incommensurable. En effet, soit, s'il est possible $e = (q : p)$, p et q étant des nombres entiers premiers entre eux. On a évidemment

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p} + \frac{1}{1.2.3\ldots(p+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(p+2)} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

inférieur à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\left(1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(p+1)^{n-p}}\right),$$

et, à fortiori, à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}} = \frac{1}{1.2.3\ldots p}\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Donc E_n est toujours compris, quelque grand que soit n, entre

$$l_p = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots p},$$

et

$$L_p = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots p} + \frac{1}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{1}{p}.$$

La limite $(q : p)$ est supérieure à l_p et tout au plus égale à L_p. On peut donc écrire

$$\frac{q}{p} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots p} + \frac{1}{1.2.3\ldots p}\,\frac{\omega}{p},$$

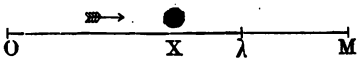
Digitized by Google

ω étant une quantité réelle positive au plus égale à l'unité. En multipliant les deux membres de cette égalité hypothétique par $1.2.3...\ p$, il vient

$$1.2.3...\ (p-1)\ q = 1.2.3...\ p + 2.3.4...\ p + 3.4.5...\ p + \cdots + p + \frac{\omega}{p},$$

relation absurde, puisque le second membre est fractionnnaire et le premier entier. La limite e de E_n ne peut donc pas être un nombre commensurable $(q : p)$.

5. *Interprétation géométrique des démonstrations relatives au second cas principal.* Les démonstrations des n^{os} 3 et 4 peuvent être réunies en une seule, quand on admet à priori l'existence de droites finies de toute grandeur.



La variable X toujours croissante peut être représentée par la distance OX d'un mobile se mouvant sur la droite OM dans le sens indiqué par la flèche(*). Si M est un point non dépassé par le mobile, il y a, entre O et M, un premier point λ non atteint par le mobile. La distance λX devient et reste aussi petite qu'on le veut, sans s'annuler jamais, puisque le mobile marche toujours dans le même sens et que tout point antérieur à λ est dépassé par le mobile. Donc OX a pour limite $O\lambda$.

6. Remarque. On démontre le théorème fondamental, dans le cas où la variable X est toujours décroissante de la même manière que dans le cas ou elle est croissante.

P. Mansion.

SUR LA PLUS COURTE DISTANCE ENTRE DEUX DROITES INFINIMENT VOISINES;

par M. E. Cesàro, élève-ingénieur, étudiant à Rome.

I. Soient D, D′, D″...., les positions successives d'une droite, qui se déplace de manière que ses cosinus directifs A, B, C, et les coordonnées x, y, z, de l'un de ses points M, sont fonctions d'une même variable. Soient P, P′ les points où D, D′ sont rencontrées par leur commune perpendicu-

---

(*) Il serait aisé de modifier la démonstration si la variable X restait toujours négative.

Digitized by Google

laire; Q', Q'' les points analogues sur D', D''; etc. Si l'on désigne MP par p, M'P' sera $p + dp + dq$, dq représentant la distance Q'P'. En outre, δ étant la plus courte distance de D, D', et λ, μ, ν ses cosinus directifs, si l'on exprime que les différences des coordonnées des points P', P sont égales aux projections de δ sur les axes, on a

$$\begin{cases} dx + pd\mathrm{A} + \mathrm{A}(dp + dq) = \lambda\delta, \\ dy + pd\mathrm{B} + \mathrm{B}(dp + dq) = \mu\delta, \\ dz + pd\mathrm{C} + \mathrm{C}(dp + dq) = \nu\delta. \end{cases}$$

Si, en ayant égard aux conditions de perpendicularité,

$$\Sigma \mathrm{A}\lambda = 0, \qquad \Sigma(\mathrm{A} + d\mathrm{A})\lambda = 0, \tag{1}$$

on multiplie respectivement par dA, dB, dC les trois équations ci-dessus, on obtient, par addition,

$$p = -\frac{1}{\theta^2}\Sigma\, d\mathrm{A}dx, \tag{2}$$

θ étant l'angle (D, D'). — Les mêmes équations, multipliées respectivement par A, B, C et ajoutées, donnent

$$dq = -dp - \Sigma\, \mathrm{A}dx. \tag{3}$$

Enfin, en multipliant par λ, μ, ν et en ajoutant, on trouve l'égalité évidente

$$\delta = \Sigma\, \lambda dx.$$

Or, d'après les égalités (1), on a

$$\frac{\lambda}{\mathrm{B}d\mathrm{C} - \mathrm{C}d\mathrm{B}} = \frac{\mu}{\mathrm{C}d\mathrm{A} - \mathrm{A}d\mathrm{C}} = \frac{\nu}{\mathrm{A}d\mathrm{B} - \mathrm{B}d\mathrm{A}} = \frac{1}{\theta}.$$

Donc, sous forme de déterminant,

$$\theta\delta = [\mathrm{A}, d\mathrm{A}, dx]. \tag{4}$$

II. Pour appliquer ces formules aux lignes à double courbure, il est utile de connaître les dérivées successives des cosinus directifs (a, b, c), (l, m, n), (f, g, h) de la tangente, la binormale et la normale principale, en un point quelconque, par rapport à la longueur s de l'arc. En partant des formules de Frenet

$$da = f\varepsilon, \quad dl = f\eta, \quad df = -(a\varepsilon + l\eta),$$

dans lesquelles ε représente l'angle de contingence et η l'angle de torsion, on trouve facilement

$$a' = \frac{f}{\rho}, \quad l' = \frac{f}{r}, \quad f' = -\left(\frac{a}{\rho} + \frac{l}{r}\right), \tag{5}$$

Digitized by Google

r et ρ étant le rayon de courbure et le rayon de torsion. Puis,

$$(6)\quad \begin{cases} a'' = -\dfrac{1}{\rho^2}a - \dfrac{1}{r\rho}l - \dfrac{\rho'}{\rho^2}f, \\ l'' = -\dfrac{1}{r\rho}a - \dfrac{1}{r^2}l - \dfrac{r'}{r^2}f, \\ f'' = \dfrac{\rho'}{\rho^2}a + \dfrac{r'}{r^2}l - \left(\dfrac{1}{\rho^2}+\dfrac{1}{r^2}\right)f; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} a''' = \dfrac{3\rho'}{\rho^3}a + \dfrac{\rho r' + 2r\rho'}{r^2\rho^2}l - \dfrac{r^2(\rho\rho'' - 2\rho'^2) + r^2 + \rho^2}{r^2\rho^3}f, \\ l''' = \dfrac{r\rho' + 2\rho r'}{r^2\rho^2}a + \dfrac{3r'}{r^3}l - \dfrac{\rho^2(rr'' - 2r'^2) + r^2 + \rho^2}{r^3\rho^2}f, \\ f''' = \dfrac{r^2(\rho\rho'' - 2\rho'^2) + r^2 + \rho^2}{r^2\rho^3}a + \dfrac{\rho^2(rr'' - 2r'^2) + r^2 + \rho^2}{r^3\rho^2}l + 3\left(\dfrac{\rho'}{\rho^3}+\dfrac{r'}{r^3}\right)f. \end{cases}$$

etc. etc. En outre, pour faciliter les calculs, il est bon de se rappeler que, dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & l & f \\ b & m & g \\ c & n & h \end{vmatrix} = 1,$$

chaque élément est égal au mineur correspondant, pris avec son signe.

III. Dans le cas de deux tangentes infiniment voisines, on a

$$[a, da, dx] = [a, da, a]\, ds = 0.$$

Donc la distance de deux tangentes infiniment voisines est un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier. Pour évaluer cette distance, il faut écrire, au lieu de (4),

$$\varepsilon\delta = [a, \Delta a, \Delta x]. \qquad (8)$$

Or, en désignant simplement par Δ la différentielle principale $\Delta s = ds$, on a

$$\Delta a = a'\Delta + \frac{a''}{1.2}\Delta^2 + \frac{a'''}{1.2.3}\Delta^3 + \cdots,$$

$$\Delta x = a\Delta + \frac{a'}{1.2}\Delta^2 + \frac{a''}{1.2.3}\Delta^3 + \cdots;$$

et la formule (8) devient

$$\varepsilon\delta = \left[a, a' + \frac{a''}{2}\Delta, \quad a + \frac{a'}{2}\Delta + \frac{a''}{6}\Delta^2\right]\cdot\Delta^2.$$

Digitized by Google

Ce déterminant se décompose en

$$\varepsilon\delta = \left[a, a', \frac{a''}{6}\Delta^2\right] \cdot \Delta^2 + \left[a, \frac{a''}{2}\Delta, \frac{a'}{2}\Delta\right] \cdot \Delta^2.$$

Par suite

$$\varepsilon\delta = -[a, a', a''] \cdot \frac{\Delta^4}{12}. \qquad (9)$$

D'après (5), (6), on a

$$[a, a', a''] = \left[a, \frac{f}{\rho}, -\frac{l}{r\rho}\right] = \frac{1}{r\rho^2}[a, l, f] = \frac{1}{r\rho^2}.$$

La formule (9) devient donc, abstraction faite du signe,

$$\delta = \frac{\Delta^4}{12r\rho^2\varepsilon} = \frac{ds^5}{12r\rho}. \qquad \text{(O. Bonnet.)}$$

IV. Une ligne quelconque peut être considérée comme étant une géodésique d'une certaine développable. En un point μ de la surface, considérons la génératrice rectiligne G, et la section perpendiculaire à G. Soit R le rayon de courbure de cette section, et φ l'angle de G avec la tangente à la ligne considérée. On sait que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\varphi}{R}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{\rho},$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{R}{\sin^2\varphi}, \quad r = \frac{R}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

La formule de Bonnet peut donc être mise sous cette autre forme :

$$\delta = \frac{ds^5}{12R^2} \cdot \sin^5\varphi\cos\varphi.$$

On voit que δ est maximum pour la géodésique qui rencontre la génératrice sous un angle de 60°.

V. Si l'on considère toutes les droites issues de M, et invariablement liées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale, l'application de la formule (2) montre que le lieu des points où chacune d'elles est rencontrée par la perpendiculaire commune, qui lui correspond, est un cylindre de révolution, de diamètre $\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}$, et tangent au plan rectifiant suivant la droite rectifiante. L'application des

Digitized by Google

autres formules permet de reconnaître que, si D est une quelconque des droites considérées, et Δ la parallèle menée par M à la perpendiculaire commune, correspondant à D, il y a réciprocité entre D et Δ. Ces deux droites, perpendiculaires entre elles, sont toujours situées dans un plan perpendiculaire au plan fixe, qui contient la normale et la droite rectifiante. La distance de D, à la droite infiniment voisine, égale la projection de ds sur Δ, et réciproquement. La tangente et la binormale, ainsi que la normale principale et la droite rectifiante, offrent deux exemples de ces couples de droites conjuguées.

VI. Considérons la droite polaire, c'est-à-dire la droite menée par le centre de courbure parallèlement à la binormale. La formule (4) donne

$$\eta\delta = [l, dl, dx + \rho df + f d\rho] = [l, f, a + \rho f'] \eta ds,$$

ou bien

$$\delta = -[l, f, l]\frac{\rho}{r} ds = 0.$$

Donc la surface polaire est développable. Les arêtes de rebroussement de la surface polaire et de la surface rectifiante se correspondent de telle sorte que la tangente, la binormale, et la normale principale, en un point de l'une, sont respectivement parallèles à la binormale, à la tangente, et à la normale principale, au point correspondant de l'autre. On démontre facilement que les droites joignant les points correspondants des deux arêtes forment une surface gauche.

VII. Si l'on veut évaluer la distance entre deux droites polaires consécutives, il faut écrire ainsi la formule (4) :

$$\eta\delta = [l, \Delta l, \Delta X],$$

X désignant $x + \rho f$. On reconnaît aisément que les coefficients de Δ^2 et de Δ^3, dans le second membre, sont nuls, et que le coefficient de Δ^4 est

$$\tfrac{1}{6}[l, l', X'''] + \tfrac{1}{4}[l, l'', X''] + \tfrac{1}{6}[l, l''', X'].$$

Or, en suivant la marche ordinaire, c'est-à-dire en ramenant chacun de ces déterminants au déterminant $[a, l, f] = 1$, on trouve :

$$[l, l', X'''] = \frac{r^2(\rho'^2 - 2\rho\rho'') + \rho^2}{r^5\rho^2},$$

$$[l, l'', X''] = \frac{r^2\rho'' + rr'\rho' - \rho}{r^5\rho},$$

$$[l, l''', X'] = -\frac{(r\rho' + 2\rho r')\rho'}{r^2\rho^2};$$

Digitized by Google

et, après substitution,

$$\delta = \frac{ds^5}{12r^2\rho}(\rho + rr'\rho' + r^2\rho''). \qquad (10)$$

VIII. La formule (2) donne

$$p = -\frac{1}{\eta^2}\Sigma dld\mathrm{X} = -r^2\Sigma l'\mathrm{X}'.$$

Or

$$\Sigma l'\mathrm{X}' = \frac{\rho'}{r}\Sigma f^2 - \frac{\rho}{r^2}\Sigma lf = \frac{\rho'}{r}.$$

Donc, en valeur absolue,

$$p = r\rho'.$$

Ainsi, une droite polaire est coupée par la droite polaire infiniment voisine, à une distance $r\rho'$ du centre de courbure. D'après le dernier résultat, la formule (10) peut être mise sous la forme suivante :

$$\delta = \frac{ds^5}{12r\rho}\left(\frac{\rho}{r} + \frac{dp}{ds}\right).$$

IX. En général, si l'on pose d'abord

$$\mathrm{D}_{p,q} = [\mathrm{A}, \mathrm{A}^{(p)}, x^{(q)}]\,(*),$$

puis,

$$u_k = \mathrm{C}_{k,1}\mathrm{D}_{1,k-1} + \mathrm{C}_{k,2}\mathrm{D}_{2,k-2} + \mathrm{C}_{k,3}\mathrm{D}_{3,k-3} + \cdots\cdots + \mathrm{C}_{k,k-1}\mathrm{D}_{k-1,1},$$

la formule (4) donne

$$\delta \sin\theta = \frac{u_2}{1.2}ds^2 + \frac{u_3}{1.2.3}ds^3 + \frac{u_4}{1.2.3.4}ds^4 + \text{etc.}$$

On peut observer que

$$2u_3 = 3u'_2.$$

Conséquemment, on ne saurait avoir $u_2 = 0$, sans avoir aussi $u_3 = 0$. La distance entre deux droites infiniment voisines ne peut donc jamais être un infiniment petit du second ordre, par rapport à la distance de deux points infiniment voisins, à moins que θ ne soit nul.

Les déterminants qui entrent dans l'expression générale de δ jouissent

(*) $\mathrm{F}_{(s)}^{(p)}$ représente la p^{me} dérivée de $\mathrm{F}(s)$, par rapport à s.

Digitized by Google

de quelques autres propriétés, dignes de remarque. Si, par exemple, en laissant p, q, n constants, on pose

$$S_k = D^{(n-k)}_{p,q+k} + C_{k,1} D^{(n-k)}_{p+1,q+k-1} + C_{k,2} D^{(n-k)}_{p+2,q+k-2} + \cdots\cdots + C_{k,k} D^{(n-k)}_{p+k,q};$$

on a symboliquement

$$(1 - S)^n = [A^{(n)}, A^{(p)}, x^{(q)}].$$

En particulier, pour $n = p$, $(1 - S)^p = 0$.

×SUR LE QUADRILATÈRE HARMONIQUE;

par M. J. Neuberg.

M. Tucker, à qui l'on doit déjà plusieurs travaux importants sur la Géométrie récente du triangle, vient d'étendre au quadrilatère les notions des points et des cercles de Lemoine et de Brocard (*). Les résultats auxquels il est parvenu, ainsi que les propriétés trouvées par M. M'Cay à la suite de la publication partielle des recherches de M. Tucker dans l'*Educational Times*, présentent un assez grand intérêt, et il nous a semblé utile de les faire connaître aux lecteurs de *Mathesis*, en ajoutant quelques nouvelles remarques. Pour plus de facilité, nous adoptons l'ordre suivi dans notre Note sur le centre des médianes antiparallèles (**).

1. Pour rendre l'analogie entre le triangle et le quadrilatère aussi complète que possible, il faut considérer un quadrilatère *inscriptible* ABCD dans le plan duquel il existe un point E dont les distances aux côtés soient proportionnelles à ces côtés. Or, si B′ est le point d'intersection des tangentes menées par A et C au cercle ABCD, et B″ celui des tangentes menées par B et D, les *symédianes* B′B, B′D, B″A, B″C des triangles ABC, ADC, BAD, BCD sont respectivement les lieux des

---

(*) La note de M. Tucker, présentée à la Société mathématiqne de Londres dans la séance du 12 février 1885, porte le titre : *Some Properties of a Quadrilateral in a Circle, the Rectangles under whose Opposite Sides are equal.* Elle donne, à la fin, les recherches de M. M' Cay.

(**) *Mathesis*, t. I, p. 173. Voir aussi l'Introduction de l'article de M. Lemoine, *Mathesis*, t. V. p. 103. M. Tucker commence par établir l'existence des points de Brocard et en déduit celle du point de Lemoine. On peut aussi suivre la marche indiquée par M. Tarry, dans sa théorie de trois figures semblables (*Mathesis*, II, p. 73). Cette remarque et quelques résultats qui s'en déduisent m'ont été communiqués par M. M'Cay.

Digitized by Google

points dont les distances aux côtés des angles B, D, A, C du quadrilatère sont proportionnelles à ces côtés. Par conséquent, l'existence du point E exige que B′ soit sur BD et B″ sur AC, conditions qui se réduisent à une seule. Alors E se confond avec le point d'intersection des diagonales AC, BD. Mais les perpendiculaires abaissées de D sur AB et BC, à cause de deux triangles semblables, sont entre elles comme AD et CD; comme elles sont aussi dans le rapport AB : BC (BD est symédiane de ABC), on a la condition

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}, \quad \text{ou} \quad AB.DC = AD.BC. \tag{1}$$

Il est facile de voir que l'égalité (1), nécessaire, est également suffisante (*).

Un tel quadrilatère a reçu le nom de *quadrilatère harmonique*. Le point E peut être appelé *point de Lemoine*.

2. A un cercle donné O, on peut inscrire une infinité de quadrilatères harmoniques ayant pour point de Lemoine un point intérieur donné E : on mène par E une corde quelconque AC et l'on joint E au pôle B′ de AC (M'CAY).

Les pôles B′, B″ des diagonales AC, BD se déplacent sur la polaire de E en divisant harmoniquement la corde (imaginaire) déterminée par le cercle sur cette droite. Par suite, si F est le point de rencontre de B′ B″ avec OE, et I, I′ ceux de OE avec le cercle décrit de F comme centre et ayant pour rayon la tangente menée de F au cercle O, on a $FB'.FB'' = -\overline{OI}^2$. Il en résulte que les angles B′IB″ et B′I′B″ sont droits, ce qui donne un nouveau moyen de construire les quadrilatères harmoniques.

3. Tout triangle ABC donne lieu à trois quadrilatères harmoniques. Soit A′B′C′ le triangle formé par les tangentes en A, B, C au cercle circonscrit O. Les symédianes AA′, BB′, CC′ concourent au point de Lemoine K du triangle ABC; elles rencontrent le cercle en des points D_a, D_b, D_c et les côtés BC, CA, AB, en des points E_a, E_b, E_c, tels que les quadrilatères ABD_aC, $ABCD_b$, $ACBD_c$ sont harmoniques et ont pour points de Lemoine respectivement E_a, E_b, E_c.

Nous distinguerons les éléments de ces trois quadrilatères par les

(*) Si l'on se sert du calcul directif (des équipollences), l'équation (1) suffit pour définir le quadrilatère harmonique et en obtenir quelques propriétés. Les différentes formes de la proportion harmonique entre quatre points en ligne droite trouvent facilement leur interprétation dans le quadrilatère. Voir, par exemple, A. TRANSON, *Nouvelles Annales*, 1868, pp. 249, 260, 264.

Digitized by Google

indices a, b, c. Toutefois, pour établir les théorèmes et les formules, nous considérerons de préférence le quadrilatère $ABCD_b$ en sous-entendant l'indice b.

A l'exemple de quelques auteurs allemands, nous appelons *cercles d'Apollonius* d'un triangle ABC, les cercles qui ont pour diamètre le segment d'un côté entre la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle opposé; ce sont les lieux des points dont les distances aux extrémités d'un côté sont proportionnelles aux côtés adjacents. Ils coupent orthogonalement le cercle ABC, et leurs centres A'', B'', C'' situés à l'intersection des côtés correspondants des triangles ABC, A'B'C' sont sur la *droite de Lemoine,* polaire de K par rapport au cercle O (*). *Les symédianes du triangle* ABC *ou les secondes diagonales des quadrilatères harmoniques dérivés de* ABC *sont les cordes communes au cercle* ABC *et à l'un des cercles d'Apollonius.* (*A continuer.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

Questions 52 et 78.

(Voir *Mathesis*, t. I, pp. 96 et 184.)

52. *Les équations de la forme*

$$x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0,$$

où α, β, γ, *sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du troisième degré ayant une racine entière ou fractionnaire,*

(*) Les trois cercles d'Apollonius d'un triangle ABC se coupent en deux points W, W' que nous avons appelés *centres isodynamiques*, en raison des égalités $AW.BC = BW.CA = CW.AB$, $AW'.BC = BW'.CA = CW'.AB$. Ces points divisent harmoniquement le diamètre OK du cercle O, sont symétriques par rapport à la droite de Lemoine et ont pour conjugués isogonaux les points d'intersection des droites joignant les sommets de ABC aux sommets des triangles équilatéraux contruits extérieurement ou intérieurement sur les côtés opposés; si l'on prend l'un d'eux pour centre d'inversion, les inverses des points A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral (voir notre *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 37).

Nous rappelons ces propriétés, parce qu'elles ont leurs analogues dans le quadrilatère harmonique.

(**) Nous avons oublié de mentionner une bonne solution de la question 274 par M. Boedt et de la question 409, par M. Farisano.

Digitized by Google

qu'on puisse trouver par la règle de Tartaglia (ou de Cardan), en n'opérant que sur des grandeurs commensurables. (E. KUMMER.)

Solution par M. FAUQUEMBERGUE, *professeur au lycée de Nice.* Pour résoudre l'équation générale

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

on commence par faire disparaître le second terme, en posant

$$x = y - \frac{P}{3}.$$

L'équation en y est de la forme

$$y^3 + py + q = 0.$$

Les racines de cette dernière sont données, comme l'on sait, par les formules :

$$y_1 = a + b, \quad y_2 = -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{-3}, \quad y_3 = -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sqrt{-3},$$

où l'on suppose

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad b = -\frac{p}{3a}.$$

Pour que les extractions de racines s'effectuent rationnellement, il faut d'abord que la quantité $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ soit un carré parfait, ce qui prouve déjà que l'équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle. Il faut ensuite que la racine carrée de cette quantité, augmentée de $-\frac{1}{2}q$ donne un cube parfait. Les valeurs de a et b sont alors rationnelles, et les trois racines x_1, x_2, x_3 données par la relation $x = y - \frac{1}{3}P$ sont de la forme

$$\alpha, \quad \beta + \gamma\sqrt{-3}, \quad \beta - \gamma\sqrt{-3},$$

α, β, γ désignant des nombres rationnels. En développant l'équation qui admet ces trois racines, savoir :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

on trouve une équation de la forme annoncée.

Réciproquement, toute équation de la forme indiquée conduira à des expressions rationnelles pour $\sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}$, a et b. En effet, dans le cas actuel, on a

$$P = -(\alpha + 2\beta), \quad y = x + \tfrac{1}{3}P = x - \tfrac{1}{3}(\alpha + 2\beta),$$

Digitized by Google

$$y_1 = \alpha - \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) = 2\frac{\alpha - \beta}{3},$$

$$y_2 = \beta + \gamma\sqrt{-3} - \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) = -\frac{\alpha - \beta}{3} + \gamma\sqrt{-3},$$

$$y_3 = -\frac{\alpha - \beta}{3} - \gamma\sqrt{-3}$$

ou, en posant $\alpha - \beta = 3\delta$,

$$y_1 = 2\delta, \quad y_2 = -\delta + \gamma\sqrt{-3}, \quad y_3 = -\delta - \gamma\sqrt{-3}.$$

Il vient ensuite

$$p = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3 = -4\delta^2 + (\delta^2 + 3\gamma^2) = 3\gamma^2 - 3\delta^2,$$

$$q = -y_1y_2y_3 = -2\delta(\delta^2 + 3\gamma^2),$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \delta^2(\delta^2 + 3\gamma^2)^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^3 = [\gamma(3\delta^2 + \gamma^2)]^2;$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\delta(\delta^2 + 3\gamma^2) + \gamma(3\delta^2 + \gamma^2)} = \gamma + \delta$$

$$b = \left(-\frac{p}{3}\right) : a = (\gamma^2 - \delta^2) : (\gamma + \delta) = \gamma - \delta.$$

78. *Les équations de la forme*

$$x^4 - (\alpha + \beta + 2\gamma)x^3 + (\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 + 3\delta^2)x^2 -$$
$$- [(\alpha + \beta)(\gamma^2 + 3\delta^2) + 2\alpha\beta\gamma]x + \alpha\beta(\gamma^2 + 3\delta^2) = 0,$$

où α, β, γ, δ, sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du quatrième degré ayant une racine entière ou fractionnaire qui puisse être trouvée, par les formules d'Euler, en n'opérant que sur des grandeurs commensurables. (E. KUMMER.)

Solution par M. FAUQUEMBERGHE *professeur au lycée de Nice.* On sait que les racines de l'équation du quatrième degré, privée de *second* terme,

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

dépendent de celles de la suivante :

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$$

connue sous le nom de *résolvante* d'*Euler*.

Digitized by Google

Si z', z'', z''', sont les racines de cette équation, on a, pour déterminer y, les valeurs

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}),$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}),$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}),$$
$$y_4 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}),$$

où l'on suppose $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ pris avec un signe quelconque, mais $\sqrt{z'''}$ avec un signe tel que le produit de ces trois radicaux soit de signe contraire à celui de q.

D'après la question 52, pour que toutes les extractions de racines s'effectuent rationnellement, les valeurs de z doivent être de la forme

$$\lambda, \quad \mu + \nu\sqrt{-3}, \quad \mu - \nu\sqrt{-3},$$

λ, μ, ν, étant des nombres rationnels. Il faut ensuite que $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\mu \pm \nu\sqrt{-3}}$, donnent des résultats de la forme

$$a, \quad b \pm c\sqrt{-3},$$

a, b, c, étant rationnels.

Le système des valeurs de y donnera

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(a + 2b), \quad y_2 = \tfrac{1}{2}(a - 2b),$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}(-a + 2c\sqrt{-3}), \quad y_4 = \tfrac{1}{2}(-a - 2c\sqrt{-3}).$$

On voit qu'il y a deux racines rationnelles, et que les deux autres sont imaginaires.

Considérons maintenant l'équation générale

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0.$$

On fait disparaître le second terme en posant

$$x = y - \frac{P}{4}.$$

Les valeurs de x ne diffèrent de celles de y, trouvées précédemment, que de la constante rationnelle $\frac{1}{4}P$. Donc les quatre valeurs de x sont de la forme

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma + \delta\sqrt{-3}, \quad \gamma - \delta\sqrt{-3},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des nombres rationnels. En développant l'équation

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0,$$

on trouve qu'elle a bien la forme donnée dans l'énoncé.

Digitized by Google

Réciproquement, toute équation de la forme indiquée pourra être résolue par la méthode d'Euler en n'opérant que sur des quantités incommensurables. En effet, des valeurs de P, Q, R, S en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, il résulte que les valeurs de x sont $\alpha, \beta, \gamma + \delta\sqrt{-3}, \gamma - \delta\sqrt{-3}$; par suite, celles de y sont

$$y_1 = x_1 + \tfrac{1}{4}P, \quad y_2 = x_2 + \tfrac{1}{4}P, \quad y_3 = x_3 + \tfrac{1}{4}P, \quad y_4 = x_4 + \tfrac{1}{4}P,$$

Or, on déduit des relations qui donnent y_1, y_2, y_3, y_4 au moyen de $\sqrt{z'}, \sqrt{z''}, \sqrt{z'''}$,

$$\sqrt{z'} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + 2\gamma),$$
$$\sqrt{z''} = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + 2\delta\sqrt{-3}),$$
$$\sqrt{z'''} = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta - 2\delta\sqrt{-3}).$$

Les carrés de ces expressions seront de la forme

$$a^2, \quad b^2 - 3c^2 + 2bc\sqrt{-3}, \quad b^2 - 3c^2 - 2bc\sqrt{-3}.$$

a, b, c étant rationnels. Donc l'équation en z aura, d'après la question 52, des solutions que l'on pourra trouver par la formule de Tartaglia en n'opérant que sur des quantités commensurables et de plus on pourra extraire la racine carrée de ces solutions.

Solutions analogues par M. E. Cesáro.

Questions 258 et 259.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 144.)

258. *Trouver dans le plan d'un triangle* ABC, *le lieu d'un point* M *tel que les perpendiculaires menées par* A, B, C, *respectivement sur les droites* MB, MC, MA *se coupent en un même point* M'. *Quel est le lieu du point* M' ? (J. N.)

259. *Trouver, dans la question précédente, l'enveloppe de la droite* MM'. (J. N.)

Solution par M. H. Brocard. Soient B l'origine des coordonnées rectangulaires, BC l'axe des x ; (p, q), $(a, 0)$, (α, β) les coordonnées des points A, C, M. Les équations des droites AM', BM', CM' seront

$$\beta y + \alpha x - (\alpha p + \beta q) = 0, \tag{1}$$
$$\beta y + (\alpha - a)\, x = 0, \tag{2}$$
$$(\beta - q)\, y + (\alpha - p)\, x - a(\alpha - p) = 0. \tag{3}$$

Digitized by Google

En exprimant que ces lignes concourent en un même point M', on trouve l'équation du lieu du point M, savoir :

$$(\alpha - p)\,a^2\beta + (p\alpha + q\beta)(p\beta - q\alpha + aq - a\beta) = 0. \qquad (4)$$

Ce lieu est une hyperbole circonscrite au triangle donné et passant par les points B_1, C_1, A_1, intersections des hauteurs AB_1, BC_1, CA_1 avec les droites BB_1, CC_1, AA_1 respectivement perpendiculaires à AB, BC, CA.

Si le triangle donné est rectangle en C, $p = a$, et alors l'hyperbole se réduit à deux droites représentées par

$$x = a, \quad y = \frac{aqx}{a^2 - q^2}.$$

La première droite est AC; l'autre passe par l'origine B et par le A_1 où la hauteur CA_1 rencontre la droite AA_1 parallèle à BC. Dans ce cas, tous les points M de la droite AC ont leurs correspondants M' sur la droite BC (ou BC_1, car C_1 coïncide avec C); tous les points M de la droite BA_1 ont leurs correspondants M' sur la droite AD perpendiculaire à BA_1. Cette ligne AD rencontre By en un point D' tel que $BD' = \frac{a^2}{q}$.

On peut également supposer $p = 0$; le triangle ABC est alors rectangle en B. L'équation (4) se décompose en deux autres

$$y = 0; \quad y = \frac{a^2 - q^2}{aq}x + q.$$

Par suite le lieu est formé par le côté BC et une droite qui passe par A et par le point C_1 où la hauteur BC_1 rencontre la droite CC_1 perpendiculaire à BC. Tous les points M de la droite BC ont leurs correspondants M' sur la droite AB; tous les points M de AC_1 ont leurs correspondants sur la droite CE perpendiculaire à AC_1 et menée par C.

Pour obtenir le lieu de M', il suffit d'éliminer α, β entre les équations (1), (2) et (3). Des deux premières, on tire

$$\alpha = \frac{-ax(y - q)}{qx - py}, \quad \beta = \frac{ax(x - p)}{qx - py}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3); il vient

$$pqy^2 + (a^2 + p^2 - q^2 - ap)\,xy + (a - p)\,qx^2 + aq(p - a)\,x - ap^2y = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole circonscrite au triangle donné et passant par les points C_2, A_2, B_2 où les hauteurs AC_2, BA_2, CB_2 sont coupées par les droites CC_2, AA_2, BB_2 respectivement perpendiculaires à CA, AB, BC.

Digitized by Google

Les substitutions $p = a$ et $p = 0$ donnent

$$y = 0, \quad y = \frac{q^2 - a^2}{aq} x + \frac{a^2}{q};$$

$$x = 0, \quad y = \frac{aq}{q^2 - a^2}(x - a).$$

On retrouve ainsi les droites BC et AD, AB et CE.

L'équation de la droite MM′ est

$$Y - y = \frac{\beta - y}{\alpha - x}(X - x), \tag{5}$$

où x et y doivent être remplacés par leurs expressions tirées de (1) et (2) :

$$x = \frac{p\alpha + q\beta}{a}, \quad y = \frac{a - \alpha}{\beta} \cdot \frac{p\alpha + q\beta}{a}.$$

On a, en outre, l'équation de condition (4) entre α et β. Il resterait à éliminer α, β, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre les équations (4) et (5), et leurs dérivées par rapport à α.

Autre solution. Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les distances des points M et M′ aux côtés du triangle de référence ABC, et désignons par λ l'angle BAM′. On trouve facilement

$$\frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{\sin\lambda}{\sin(A - \lambda)} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin A - \cos A \operatorname{tg}\lambda},$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\cos\lambda}{\cos(B + \lambda)} = -\frac{1}{\cos B - \sin B \operatorname{tg}\lambda};$$

d'où, en éliminant λ,

$$\frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{\gamma \cos B + \alpha}{\gamma \cos C - \alpha \cos A}.$$

Par analogie

$$\frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\alpha \cos C + \beta}{\alpha \cos A - \beta \cos B}, \quad \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta \cos A + \gamma}{\beta \cos B - \gamma \cos C}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on obtient l'équation du lieu de M, savoir :

$$(\alpha \cos C + \beta)(\beta \cos A + \gamma)(\gamma \cos B + \alpha) =$$
$$(\alpha \cos A - \beta \cos B)(\beta \cos B - \gamma \cos C)(\gamma \cos C - \alpha \cos A).$$

Digitized by Google

Les facteurs du second membre égalés à zéro représentent les hauteurs du triangle; ceux du premier membre égalés à zéro représentent les perpendiculaires élevées par C, A, B respectivement sur BC, CA, AB. Par conséquent, le lieu de M passe par les sommets du triangle ABC, et par les points de rencontre des hauteurs avec les perpendiculaires par C, A, B sur BC, CA, AB. Il se décompose en une conique et la droite à l'infini; car un point situé à l'infini dans une direction quelconque répond à la question.

Pour décomposer l'équation en facteurs, développons les produits indiqués et remarquons que

$$1 + \cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B,$$
$$\cos A - \cos A \cos^2 B = \cos A \sin^2 B, \quad \cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B, \text{ etc.};$$

on parvient alors à mettre en évidence la quantité $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$ qui correspond à la droite de l'infini. On trouvera ainsi l'équation de la conique qui forme le lieu proprement dit, savoir :

$$\frac{\cos B \sin C}{\alpha} + \frac{\cos C \sin A}{\beta} + \frac{\cos A \sin B}{\gamma} = 0. \qquad (A)$$

De même, le lieu de M′ a pour équation

$$\frac{\sin B \cos C}{\alpha} + \frac{\sin C \cos A}{\beta} + \frac{\sin A \cos B}{\gamma} = 0. \qquad (B)$$

Les courbes (M) et (M′) se coupent aux sommets du triangle de référence et en un quatrième point N qui jouit de la triple propriété que les perpendiculaires menées sur les droites NA, NB, NC, respectivement par B, C, A ou par C, A, B ou par A, B, C concourent en un même point R′ ou R″ ou R. Les triangles ABC, RR′R″ sont inscrits à une même ellipse ayant pour centre leur centre de gravité commun. Les cercles osculateurs qui touchent cette ellipse aux points A, B, C, concourent au point R. Cette propriété étant due à Steiner, nous proposons d'appeler R le *point de Steiner du triangle* ABC. Les point R′, R″ sont à l'intersection des arcs des segments capables des angles A, B, C construits extérieurement sur BC, CA, AB ou sur CA, AB, BC ; ce qui établit une relation assez curieuse entre ces points et les points de Brocard.

Le point N est à l'intersection du cercle ABC avec l'hyperbole équilatère qui passe par les sommets, le point de concours des hauteurs et

Digitized by Google

le centre de gravité du triangle ABC. En effet, la somme et la différence des équations (A) et (B) donnent

$$\frac{\sin A}{\alpha} + \frac{\sin B}{\beta} + \frac{\sin C}{\gamma} = 0, \qquad (C)$$

$$\frac{\sin (B - C)}{\alpha} + \frac{\sin (C - A)}{\beta} + \frac{\sin (A - B)}{\gamma} = 0. \qquad (D)$$

L'équation (C) est celle du cercle ABC, et (D) représente le lieu du point de concours des droites joignant A, B, C aux sommets des triangles isocèles semblables BCA′, CAB′, ABC′, l'angle à la base étant variable. Si cet angle est nul ou droit, le point du lieu est le centre de gravité ou le point du concours des hauteurs.

Les points N et R ont déjà été rencontrés par plusieurs géomètres(*). (Voir Brocard, *Nouvelles propriétés du Triangle*, Congrès de Rouen).

L'enveloppe de la droite MM′ peut être définie ainsi : Sur deux coniques (M), (M′) on marque deux divisions homographiques ; quelle est la courbe qui touche la droite joignant deux points homologues?

(J. Neuberg.)

Question 363.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 175.)

Chercher l'enveloppe de la droite qui joint les projections d'un point quelconque de la parabole sur l'axe et sur la tangente au sommet.

(J. Gillet.)

Solutions par M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.

I. *Solution géométrique* (**). Propriétés connues : 1° Le sommet de la parabole (P) est à égale distance du point T où une tangente quelconque coupe l'axe et de la projection du point de contact M sur cet axe; 2° le point T′ où une tangente quelconque à (P) coupe la tangente au sommet est à égale distance du sommet et de la projection du point de contact sur la tangente au sommet.

(*) La courbe (D) a été étudiée par M. Brocard sous le nom d'*hyperbole équilatère des neuf points* (*Journal de Bourget*, 1884 et 1885), et par *M. Artz* (*Programme du progymnase de Recklinghausen*, 1884). On peut l'appeler *hyperbole de Kiepert*, du nom du géomètre qui l'a considérée pour la première fois (N. A. M, 1869 (2) VIII, 40-42).

(**) Le lecteur est prié de tracer la figure.

Digitized by Google

D'après cela, le lieu du point M′ qui a pour projections respectives sur l'axe et la tangente au sommet, les points T et T′, est évidemment une parabole (P′) qui a même axe et même tangente au sommet que (P), mais qui est tournée en sens contraire et dont le paramètre est le quart du paramètre de (P).

Donc, réciproquement, la parabole (P) est l'enveloppe de la droite TT′ qui joint les projections, sur l'axe et la tangente au sommet, d'un point quelconque M′ de (P′). De là la solution de la question.

II. *Analytiquement*, le problème est compris dans celui-ci : trouver l'enveloppe de la droite

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1,$$

les paramètres (α, β) satisfaisant à l'équation $f(\alpha, \beta)=k$, k constant. La méthode connue (Voir mon *Cours d'Analyse*, N° 171) conduit aux équations

$$\frac{\frac{x}{\alpha}}{\alpha\frac{df}{d\alpha}}=\frac{\frac{y}{\beta}}{\beta\frac{df}{d\beta}}=\frac{1}{\alpha\frac{df}{d\alpha}+\beta\frac{df}{d\beta}}.$$

On remarque les cas particuliers suivants : 1° $f(\alpha, \beta)$ est homogène du degré m. On a $\alpha\frac{df}{d\alpha}+\beta\frac{df}{d\beta}=mk$, d'où

$$x=\frac{\alpha^2}{mk}\frac{df}{d\alpha},\quad y=\frac{\beta^2}{mk}\frac{df}{d\beta}.$$

Par exemple, pour

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m+\left(\frac{\beta}{b}\right)^m=1,$$

on trouve l'enveloppe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{m+1}}=1.$$

2° $f(\alpha, \beta)=\alpha^\mu\beta^\nu=k$. On trouve facilement

$$\alpha\frac{df}{d\alpha}+\beta\frac{df}{d\beta}=(\mu+\nu)k,\quad x=\frac{\mu\alpha}{\mu+\nu},\quad y=\frac{\nu\beta}{\mu+\nu}.$$

Digitized by Google

d'où

$$x^{\mu}y^{\nu} = \frac{k\mu^{\mu}\nu^{\nu}}{(\mu+\nu)^{\mu+\nu}}$$

pour l'équation de l'enveloppe. Dans le problème proposé, $\beta^2 = h\alpha$ (h étant le paramètre de la parabole), on a

$$\mu = -1, \quad \nu = 2, \quad k = h,$$

d'où

$$y^2 = -4hx$$

ce qui s'accorde avec la solution géométriqne. L'exercice 3, p. 223 de mon *Cours d'Analyse*, est une généralisation.

Solutions analogues par M. SERVAIS, qui généralise la question à peu près comme M. GILBERT.

Solutions par M. V. JAMET. *Solution géométrique.* Soit M un point pris sur la parabole donnée, N sa projection sur l'axe, P sa projection sur la tangente au sommet, O le sommet de la parabole.

Menons du point P une perpendiculaire sur la droite NP, et soit A le point où elle coupe l'axe. On voit immédiatement que $\overline{OP}^2 = AO \times ON$. Mais, d'autre part, $\overline{OP}^2 = 2p.\ ON$. Donc $AO = 2p$; par suite, le point A est fixe, et la droite NP enveloppe une parabole ayant pour foyer le point A et pour sommet le point O.

Solution analytique. Si (α, β) sont les coordonnées de M, l'équation de MP est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

ou, en vertu de la relation $\alpha = \frac{\beta^2}{2p}$,

$$\beta^2 - \beta y - 2px = 0.$$

Donc l'enveloppe de NP a pour équation $y^2 + 8px = 0$. C'est une parabole de même axe et de même sommet que la proposée, d'un paramètre quadruple et tournée dans le sens des x négatifs.

Solution analogue à la précédente par MM. FARISANO, HENRARD, RENSON, JEŘABEK, GOB, POILVACHE, BASTIN, FALISSE, VERNIORY, qui interprète les mêmes calculs en coordonnées obliques, et par M. MINOLITI, qui traite la question analogue pour une hyperbole équilatère et trouve une courbe homothétique à la proposée (résultat évident).

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**464.** Calculer le côté, l'angle et la hauteur d'un triangle sphérique équilatéral 1° en fonction du rayon du cercle inscrit; 2° en fonction du rayon du cercle circonscrit.

×**465.** Sur les milieux N, P des côtés AC, AB du triangle ABC, on élève des perpendiculaires coupant en N′ et P′ la médiane AM. Démontrer 1° que les droites BP′, CN′ se rencontrent en un point D de la symédiane issue de A; 2° que $\overline{AD}^2 = BD.CD$. (L. VERNIORY.)

×**466.** Si ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle O, démontrer que les perpendiculaires menées par D sur DA, DB, DC rencontrent respectivement BC, CA, AB en trois points d'un même diamètre du cercle O. (FARISANO.)

467. D'un point P (x, y), on mène à une conique deux tangentes PM, PN. Trouver l'aire du quadrilatère FMPN, F étant un foyer. (FARISANO.)

468. Par un des points d'intersection A de deux hyperboles équilatères de même centre O, on mène une sécante qui rencontre les deux courbes en B, B′. Soient C, C′ les projections de ces points sur les tangentes en A à la courbe correspondante. Démontrer, par la géométrie, que l'angle COC′ est double de l'angle des asymptotes. (FAUQUEMBERGUE.)

×**469.** Résoudre l'équation

$$\sin(a - x)\sin(b - x)\sin(c - x)\sin(d - x) = \sin^4 x,$$

sachant que $a + b + c + d = 2\pi$. (TUCKER.)

470. Dans un triangle donné ABC, on mène par un point quelconque M du côté BC les droites MN, MP parallèles à deux directions données et rencontrant respectivement AB en N, AC en P. Trouver le minimum de NP. (JENKINS.)

×**471.** Etant donnés deux petits cercles de rayons r et r', tangents entre eux extérieurement et tangents à un même grand cercle, le rayon sphérique x d'un cercle qui touche les trois précédents vérifie la relation

$$\cot x = \sqrt{\cot x \cot r - 1} + \sqrt{\cot x \cot r' - 1}$$ (GILLET et DEPREZ.)

472. On donne trois points A, B, C. Deux circonférences variables dont l'une passe par A et B, l'autre par A et C se coupent sous un angle donné φ. Trouver : 1° le lieu du second point d'intersection des deux circonférences; 2° le lieu du point de rencontre des tangentes menées par B et C; 3° l'enveloppe de la ligne des centres. (GOB.)

Digitized by Google

×QUESTIONS D'EXAMEN(*).

204. On donne deux tangentes et un foyer d'une conique; trouver, géométriquement, les lieux décrits par le second foyer (droite), par le centre (droite) et par les extrémités de l'axe focal (cubique). (FARISANO.)

Soient O le centre, F le foyer donné, et P, Q les projections de F sur les tangentes données. Le cercle principal de la conique passe par P, Q; donc O décrit une droite. Les sommets sont à l'intersection du cercle avec le diamètre FO; ces deux lignes se correspondant homographiquement, leur intersection décrit une cubique. (J. N.).

205. On donne un foyer d'une conique et un sommet A de l'axe focal; trouver le lieu décrit par un sommet B du second axe.

Ce lieu est une parabole ayant pour foyer F et pour sommet A. (FARISANO.)

Si le sommet B reste fixe, le centre décrit le cercle de diamètre FB, et le sommet A décrit un limaçon de Pascal ayant pour pôle le point F. (J. N.)

206. Soient AB un diamètre d'un cercle, AC et BD deux cordes quelconques se coupant en O. Démontrer que le cercle CDO coupe le premier cercle orthogonalement.

207. Soient α, β, γ les segments des côtés d'un triangle, compris entre la bissectrice de l'angle opposé et celle de son supplément Démontrer les relations

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0, \quad \frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}=0.$$

Il faut observer la règle des signes pour ces segments.

Rectifications.

Tome III, p. 230, ligne 10, lisez $\frac{1}{3^2}$ au lieu de $\frac{1}{3}$. Tome V, page 80, première note, lisez p. 95 et page 232. Page 84, ligne 4 en remontant, lire $(p+1)(p+2)$. Page 91, ligne 10 en remontant, lisez 257 au lieu de 258. Page 156, dernière ligne, au lieu de — *au*, lire — *arc*. Les nombres de la question 201, p. 168 doivent être rectifiés, comme il suit : 3395, 2626; 3198, 8276; 2180, 1974.

(*) Dont plusieurs questions de géométrie, peu connues tirées de *A Sequel to Euclid* (voir *Mathesis*, p. 76.)

Digitized by Google

SUR LE QUADRILATÈRE HARMONIQUE;

par M. J. NEUBERG.

(*Suite:* voir page 202.)

4. Soient X, Y, Z, U les inverses de quatre points quelconques A, B, C, D, par rapport au pôle I et à la puissance P. Des égalités

$$\frac{XY}{AB}=\frac{IX}{IB}=\frac{IX.IA}{IB\,IA}=\frac{P}{IB.IA},$$

$$\frac{XZ}{AC}=\frac{P}{IA.IC},\quad \frac{UZ}{CD}=\frac{P}{IC.ID},$$

on déduit

$$\frac{XY.ZU}{AB.CD}=\frac{XZ.YU}{AC.BD}=\frac{XU.YZ}{AD.BD}=\frac{P^2}{IA.IB.IC.ID}, \qquad (2)$$

$$\frac{XY}{AB.IC}=\frac{YZ}{BC.IA}=\frac{XZ}{AC.IB}=\frac{P}{IA.IB.IC}. \qquad (3)$$

Les relations (2) montrent que les inverses des sommets d'un quadrilatère harmonique sont quatre points en proportion harmonique, ou que le faisceau (I, ABCD) est harmonique, lorsque le centre d'inversion est sur la circonférence circonscrite. Dans le cas où ce centre est quelconque, le quadrilatère transformé est encore harmonique; pour simplifier, nous supposerons alors, ce qui ne nuit pas à la généralité, que P soit égal à la puissance de I par rapport au cercle ABCD. Le quadrilatère XYZU sera ainsi inscrit au même cercle que ABCD.

Tout quadrilatère harmonique ABCD peut se transformer, par inversion, en un carré (*). En effet, d'après les égalités (2), pour avoir XY = YZ, on doit poser

$$\frac{IA}{IC}=\frac{BA}{BC}.$$

Donc si l'on prend pour centre d'inversion un point du cercle d'Apollonius passant par B, les côtés BA et BC auront pour homologues deux droites égales YX et YZ(**); en même temps, les homologues des droites

(*) L'inversion ne s'applique qu'aux points A, B, C, D, et nullement aux droites AB, BC,.....

(**) Si φ est l'angle à la base du triangle XYZ, supposé isoscèle, les angles AIB,

Digitized by Google

DA et DC seront égales, et la symédiane BD se transformera en un diamètre du cercle ABC.

Par analogie, la circonférence décrite de B′ comme centre, avec le rayon B′A = B′C, est le lieu des centres d'inversion qui servent à transformer les triangles BAD, BCD en triangles isosceles et AC en un diamètre du cercle ABÇ(*). De là résulte le théorème suivant :

Étant donné un quadrilatère harmonique ABCD, *il existe deux centres d'inversion* I, I′ *qui le transforment en un carré. Ces points sont à l'intersection des deux circonférences qui ont pour centres les pôles* B′, B″ *des diagonales, par rapport à la circonférence* ABCD, *et passent par les extrémités de ces diagonales.*

Ces circonférences étant orthogonales à la circonférence ABCD, les points I, I′ se trouvent sur le diamètre OE et divisent harmoniquement celui-ci ; le milieu de leur distance est sur la polaire de E. Ces points ont été rencontrés plus haut : ce sont ceux d'où l'on voit la droite B′ B″ sous un angle droit.

Observons aussi que, de ces points, on voit les côtés b, c, a du triangle ABC sous les angles B ± 90°, C ± 45°, A ± 45°(**).

5. Pour abréger l'écriture, nous posons, dans le quadrilatère harmonique $ABCD_b$:

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d,\ AC = f,\ BD = g,$$

et nous désignons par A, B, C, D les angles du quadrilatère, par

---

CIB ont pour valeurs C + φ, A + φ. Donc, si sur les côtés a, c d'un triangle, on construit des segments capables des angles A + φ, C + φ (ou capables de deux angles dont la différence est C — A), le second point d'intersection des circonférences ainsi obtenues est sur le cercle d'Apollonius passant par B.

(*) D'après cela, et en s'appuyant sur les égalités (2), on voit que pour tout point I du cercle qui a pour centre B′ et pour rayon B′A :

$$BIC = A \pm 90°, (BC.AI)^2 = (AB.CI)^2 + (AC.BI)^2.$$

(D'Ocagne, *Nouvelles Annales*, 1885, p. 386).

(**) Les distances de ces points aux côtés a, b, c de ABC sont proportionnelles à

$$\sin A \pm \cos A,\quad \cos B,\quad \sin C \pm \cos C.$$

Pour la détermination des centres d'inversion servant à transformer les sommets d'un triangle ABC, en les sommets d'un triangle XYZ semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$, on peut voir les questions 307 (*Mathesis*, t IV, p. 197) et 447 (*Mathesis*, t. V, p. 144). Dans la question 447, O′ est le centre d'inversion cherché, et O son conjugué isogonal par rapport à ABC.

Digitized by Google

θ_1, θ_2, θ_3, θ_3 les angles sous-tendus respectivement par les cordes a, b, c, d. Soient F et G les milieux de f et g. Prolongeons aussi BF de FN = BF et traçons CN. Cela posé, une propriété fondamentale de la symédiane donne angle ABF = CBD = θ_3, CBF = ABD = θ_4, BAG = DAC = θ_5, etc. Il en résulte la similitude des triangles suivants : 1° ABD, FBC, FCD ; 2° CBD, FBA, FAD ; 3° ACD, BCG, ABG, NBC. On retrouve ainsi des résultats connus, savoir : 1° *Le centre de similitude des figures semblables construites sur deux côtés consécutifs d'un quadrilatère harmonique est au milieu de la diagonale qui passe par le sommet commun à ces côtés* (*). 2° *Chaque diagonale est également inclinée sur les droites qui joignent son milieu aux extrémités de l'autre diagonale* ; 3° *la circonférence passant par deux sommets opposés, et le centre* O *du cercle circonscrit passe aussi par le milieu de la distance des deux autres sommets* (**).

La dernière propriété se déduit de la similitude des triangles ABD, FBC, FCD laquelle entraîne l'égalité des angles BAD, BFC, CFD, $\frac{1}{2}$ BOD.

6. Soient maintenant

$$EX = x,\ EY = y,\ EZ = z,\ EU = u,$$

les perpendiculaires abaissées de E sur a, b, c, d(***). On a vu que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}.$$

Il convient de représenter ces rapports égaux par $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$, φ étant un angle auxiliaire, appelé *angle de Brocard* du quadrilatère. De cette façon :

$$x = \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg}\varphi,\quad y = \tfrac{1}{2} b \operatorname{tg}\varphi,\quad z = \tfrac{1}{2} c \operatorname{tg}\varphi,\quad u = \tfrac{1}{2} d \operatorname{tg}\varphi.$$

On a évidemment :

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{ax + by + cz + du}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ABCD}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} = \frac{\mathrm{ABC}}{2(a^2 + b^2)}.$$

(*) Autrement dit : dans tout triangle ABC, le centre de similitude des figures semblables construites sur AB et BC est au milieu G de la corde symédiane BD. On en déduit que G est le foyer de deux paraboles passant par A et C, et touchant, l'une AB et BC, l'autre AD et CD.

(**) Comparer la question 423, *Mathesis*, V, p. 70 et 234.

(***) La figure, que le lecteur tracera aisément, sera jointe au prochain numéro.

Digitized by Google

Pour obtenir des expressions de $\cot\varphi$ en fonction des angles du triangle ABC, nous nous appuyons sur ce théorème élémentaire que le rapport entre un côté d'un triangle et la hauteur correspondante est égal à la somme des cotangentes des angles adjacents à ce côté. D'après cette proposition, les triangles ABE, BCE donnent

$$\cot\varphi = \tfrac{1}{2}(\cot\theta_2 + \cot\theta_4) = \tfrac{1}{2}(\cot\theta_1 + \cot\theta_3)\,(*). \qquad (4)$$

Si on l'applique aux triangles ABF et CBF, on trouve la formule connue

$$\cot \mathrm{BFC} = \tfrac{1}{2}(\cot\theta_2 - \cot\theta_4); \qquad (5)$$

celle-ci, appliquée aux triangles ABF, CBF et à leurs médianes partant de F, conduit aux égalités

$$\cot\theta_3 = 2\cot \mathrm{B} + \cot\theta_2, \quad \cot\theta_4 = 2\cot \mathrm{B} + \cot\theta_1. \qquad (6)$$

Si l'on compare les formules (4) et (5), on voit que φ est l'inclinaison de la médiane sur la base, dans un triangle dont les angles à la base sont θ_2 et $\pi - \theta_4$, ou θ_3 et $\pi - \theta_1$. Or, si E′ est le point de rencontre de AB et CD, et E″ celui de BC et AD, on forme deux triangles E′AC, E″AC dans lesquels les angles adjacents à AC ont les valeurs indiquées (**). Par conséquent : 1° *La diagonale extérieure* E′E″ *d'un quadrilatère harmonique* ABCD *est vue des milieux* F *et* G *des autres diagonales* AC *et* BD *sous l'angle* 2φ *ou* $\pi - 2\varphi$; 2° *Chacune des diagonales intérieures* AC, BD *est également inclinée sur les droites qui en joignent le milieu aux extrémités de l'une des autres diagonales* (***).

Des relations (4) et (6), on déduit la valeur de $\cot\varphi$ en fonction des angles θ_1, θ_2, B du triangle ABC, savoir :

$$\cot\varphi = \cot \mathrm{B} + \tfrac{1}{2}(\cot\theta_1 + \cot\theta_2), \qquad (7)$$

ou, en désignant par α l'angle de Brocard du triangle ABC,

$$\operatorname{cotg}\varphi = \tfrac{1}{2}(\cot \mathrm{B} + \cot\alpha)$$

(*) L'égalité $ac = bd$ entraîne $\sin\theta_1 \sin\theta_3 = \sin\theta_2 \sin\theta_4$, ce qui s'accorde avec la formule (4), si l'on observe que $\theta_1 + \theta_3 = \pi - (\theta_2 + \theta_4)$.

(**) La figure suppose BC entre E′ et AD, CD entre E″ et AB. La signification géométrique de l'angle φ que nous donnons ici est *nouvelle*. Les formules relatives à $\cot\varphi$ sont dues à M. Tucker, qui les démontre différemment.

(***) Cette propriété peut encore être établie comme il suit : Les pôles B′ et B″ de AC et BD sont situés respectivement sur BD et AC, et divisent E′E″ harmoniquement ; par suite, les droites rectangulaires FB″ et OFB′ sont les bissectrices de l'angle E′FE″ et de son supplément adjacent.

Digitized by Google

Soient φ_a, φ_b, φ_c les angles de Brocard des quadrilatères harmoniques ABD_aC, $ABCD_b$, $ACBD_c$; on trouve aisément

$$\cot\varphi_a + \cot\varphi_b + \cot\varphi_c = 2\cot\alpha.$$

Enfin, si l'on élève les deux membres de l'égalité (7) au carré et qu'on tienne compte de l'identité

$$\cot B\cot\theta_1 + \cot B\cot\theta_2 + \cot\theta_1\cot\theta_2 = 1,$$

on obtient

$$\cot^2\varphi = \cot^2 B + \tfrac{1}{4}(\cot\theta_2 - \cot\theta_1)^2 + 1,$$

ou, en vertu de (5) et de l'égalité des angles BAD et BFC,

$$\cot^2\varphi = 1 + \cot^2 B + \cot^2 A,$$
$$\operatorname{coséc}^2\varphi = \operatorname{coséc}^2 A + \operatorname{coséc}^2 B.$$

7. Cherchons encore la distance $OE = \rho$. On a

$$\rho^2 = \overline{OF}^2 + \overline{EF}^2,$$
$$OF = R\cos B, \qquad EF = \tfrac{1}{2}(EC - EA) = \tfrac{1}{2} f\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2};$$

d'où

$$\rho^2 = R^2\cos^2 B + R^2\sin^2 B\left[1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right] = R^2(1 - \operatorname{tg}^2\varphi).$$

Cette formule est importante. Elle montre que l'angle de Brocard est constant dans tous les quadrilatères harmoniques inscrits au même cercle O et ayant même point de Lemoine E. En d'autres termes, le rapport d'un côté d'un de ces quadrilatères à sa distance au point E est invariable. Si donc δ et δ' désignent les distances d'un côté aux points E et O, on a

$$\frac{\delta}{\sqrt{R^2 - \delta'^2}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R},$$

ou

$$\frac{\delta^2}{R^2 - \rho^2} + \frac{\delta'^2}{R^2} = 1.$$

On peut conclure de cette équation que *les quadrilatères harmoniques considérés sont circonscrits à une conique fixe*. Nous verrons plus loin une autre démonstration de ce théorème.

(*A continuer.*)

Digitized by Google

SUR LA COURBE DE WATT(*);

par M. E. CATALAN, professeur à l'Université de Liége.

(*Suite*, voir p. 154.)

IV. REMARQUE. Dans le triangle DOH :

$$\overline{DH}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OD}^2 - 2OH \cdot OD \sin\omega,$$

ou

$$c^2 = \overline{OH}^2 + a^2 - 2OH \cdot a \sin\omega,$$

ou

$$(\overline{OH}^2 + a^2 - c^2)^2 = 4\,\overline{OH}^2\, a^2 \sin^2\omega.$$

Et comme

$$\overline{OH}^2 = b^2 - u^2,$$

on a, sans calcul, l'équation (2).

V. Soit I le milieu de l'hypoténuse du triangle HOM (III, 2°). La droite OI = IH = $\frac{1}{2}b$. Par conséquent, la mécanisme indiqué ci-dessus peut être simplifié comme il suit :

Soient trois tiges OI, IH, HD, *articulées en* O, I, H, D, *et dont les deux premières ont même longueur*; *les points* O, D *étant fixes. Si la tige* IH *est prolongée en* IM, *de manière que* IM = IH (**), *le point* M *décrit la courbe de* WATT.

VI. Supposons HD = OI = IH (***). Alors OIHD est un quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont égaux. Donc *le point* P, *milieu de* IH, *décrit une courbe de* WATT.

VII. Enfin, si l'on considère la figure formée de l'*heptagone articulé* ALKOIHD (****) et du *parallélogramme articulé* OKMI, les points A, O, D étant fixes, on voit que *le point* M, *et les milieux* P, R, *de*

(*) L'équation (I) renferme une faute typographique. Au lieu de $\sqrt{c^2 - a^2\cos\omega}$, on doit lire $\sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}$.

(**) Plus exactement, HM est une tige, double de OI, articulée en son milieu I et en son extrémité H.

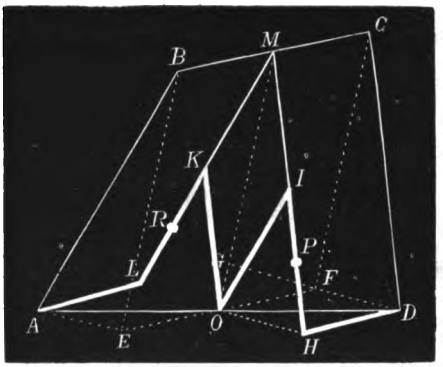
(***) C'est-à-dire $c = \frac{1}{2}b$. La figure ne réalise pas exactement cette hypothèse.

(****) Tous les côtés de cet heptagone, excepté AD, sont égaux.

Digitized by Google

IH, KL, *décrivent des courbes de* WATT. De plus, *les deux dernières lignes, égales entre elles, sont semblables à la première.*

En effet, pour passer de ABCD à chacun des quadrilatères ALKO, OIHD, on doit changer a en $\frac{a}{2}$, b en $\frac{b}{2}$.



VIII. Le Lemme équivaut à ces deux propositions de Géométrie élémentaire, que je crois peu connues :

1° *Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, la médiane des deux autres côtés est parallèle à la bissectrice de l'angle formé par les côtés égaux.*

2° *Si, sur les côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC, *on prend les distances* BD, CE *égales entre elles; le lieu géométrique du milieu de la droite* DE *est la parallèle à la bissectrice de l'angle* A, *menée par le milieu du plus petit des côtés* AB, AC.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**6.** *Sur la question* 421. (Voir *Mathesis*, V, pp. 69, 191). (Extrait d'une lettre d'un abonné.) On a, dans un triangle ABC, dont l'aire est T, le périmètre $2p$,

$$\sin A = \frac{2T}{bc}, \quad \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}; \quad \sin B = \text{etc.}$$

Donc l'égalité à vérifier devient

$$\frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca} + \frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \frac{(p-a)^2}{bc} + \frac{(p-b)^2}{ca} + \frac{(p-c)^2}{ab},$$

ou

$$a(p-b)(p-c) + b(p-c)(p-a) + c(p-a)(p-b) = a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2,$$

Digitized by Google

ou encore

$$-p\,[a\,(b+c)+b\,(c+a)+c\,(a+b)]+3\,abc=-2p\,(a^2+b^2+c^2)+(a^3+b^3+c^3).$$

Or celle-ci se réduit immédiatement à l'identité connue,

$$(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3\,abc.$$

Solution analogue par M. MEURISSE.

7. *Sur la question* 218 (Voir *Mathesis*, III, 47, V, 182-184). La solution complète se trouve dans les deux Mémoires de M. Catalan, intitulés : *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 92, *Notes sur la théorie des fractions continues*, p. 54. La limite dépend de la théorie des fonctions elliptiques.

QUESTIONS DE LICENCE;

par M. H. BROCARD, capitaine du génie, à Montpellier.

(Suite; voir *Mathesis*, t. V, p. 169.)

XVIII. *Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes définies, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$(x^2+y^2)^2=\pm a^2xy,$$

dans laquelle a *désigne un paramètre variable.* (PARIS, juillet 1879.)

De l'équation donnée résolue par rapport à a^2, on tire, par différentiation,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{3x^2-y^2}{x^2-3y^2}.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales cherchées est donc

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}\cdot\frac{3x^2-y^2}{3y^2-x^2}.$$

Cette équation homogène, traitée par la méthode habituelle, conduit à l'intégrale générale

$$y^2-x^2=C\,(x^2+y^2)^2.$$

Les courbes données et leurs trajectoires sont des lemniscates.

XIX. *Intégrer*

$$(x^2y^5-y)\,dx-(x^4y^3-2x^2y^2+3x)\,dy=0.$$

(LYON, juillet 1884.)

Digitized by Google

L'équation donnée peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2y^2 - 1}{x^3y^3 - 2x^2y^2 + 3} = \frac{y}{x} \cdot \frac{xy - 1}{x^2y^2 - 3xy + 3}.$$

La substitution $t = xy$ se présente naturellement et conduit à

$$\frac{dt}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y = \frac{t}{x} \cdot \frac{t - 1}{t^2 - 3t + 3} + \frac{t}{x}.$$

On peut séparer les variables en écrivant

$$\frac{dx}{x} = \frac{t^2 - 3t + 3}{t(t^2 - 2t + 2)}\,dt.$$

L'intégration s'achève aisément et l'on a

$$\log cx^4 = \log \frac{t^6}{1 + (t-1)^2} - 2 \operatorname{arc\,tg}(t - 1)$$

d'où

$$2 \operatorname{arc\,tg}(xy - 1) = \log\left(\frac{Ax^2y^6}{x^2y^2 - 2xy + 2}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE.

Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique déduit de la considération des coordonnées parallèles, par Maurice d'Ocagne. Paris, Gauthier-Villars, 1885. Un volume in-8° de 96 pages avec une planche. Prix : 3 francs.

Étant données deux droites parallèles Au, Bv (*axes de coordonnées*), et sur chacune d'elles une *origine* A, B, M. d'Ocagne appelle *coordonnées parallèles* d'une droite qui rencontre les axes aux points M, N, les segments AM $= u$, BN $= v$, pris avec des signes convenables. Toutes les droites dont les coordonnées vérifient une même équation du premier degré

$$\frac{u}{\alpha} + \frac{v}{\beta} = 1,$$

passent par un point fixe P, qu'on détermine le plus facilement au moyen des droites BP, AP rencontrant les axes Au, Bv en des points dont les distances aux origines A et B sont respectivement égales à α et β. On peut considérer les inverses de α et β comme étant les coordonnées de P. L'auteur établit très simplement les formules fondamentales relatives à l'angle de deux droites, à la distance de deux points, à la distance d'un point à une droite, à la transformation des coordonnées, etc., puis il entre dans quelques développements sur les courbes en général et sur les coniques en particulier.

Digitized by Google

Voici la définition des coordonnées axiales. Une droite MN, supposée mobile dans un plan, rencontre en N un axe fixe Ox sur lequel on a marqué une origine O: l'angle $MNx = \theta$ et la distance $ON = \lambda$ sont les coordonnées axiales de la droite MN. Dans ce système, les coniques ont pour équation

$$\lambda^2 = a^2 \pm b^2 \cot^2\theta, \quad \lambda = -\tfrac{1}{2} p \cot^2\theta;$$

une cycloïde est représentée par

$$\lambda = a + b\theta,$$

l'axe des λ coïncidant avec la tangente au sommet(*). Dans les applications de ce chapitre, on rencontre une courbe remarquable ayant pour équation : $\lambda = a \sin\theta$. MM. Brocard et Cesáro(**) ont observé que cette ligne déjà étudiée antérieurement par plusieurs géomètres, est une développante d'hypocycloïde à quatre rebroussements.

Toute équation entre deux variables est susceptible d'une double interprétation géométrique, suivant que les variables sont regardées comme étant les coordonnées rectangulaires d'un point mobile ou comme les coordonnées parallèles d'une droite mobile. Il résulte de là une méthode de transformation que M. d'Ocagne a développée avec beaucoup de sagacité et dont il fait des applications très curieuses. La transformation des propriétés métriques présentait certaines difficultés que l'auteur a surmontées d'une façon remarquable en introduisant ce qu'il appelle points parallèles, points perpendiculaires, l'angle de deux points, etc.

Pour résoudre graphiquement l'équation

$$z^n + zu + v = 0,$$

dans laquelle z est l'inconnue, u et v des quantités données, M. d'Ocagne construit une courbe qu'il appelle la *solutive* de l'équation. Si l'on considère u et v comme les coordonnées parallèles d'une droite, l'équation représente, pour chaque valeur attribuée à z un point facile à construire; le lieu de ces points est la solutive. On aura soin de marquer à côté des différents points de la courbe la valeur correspondante de z (ou la *cote* du point). Cela posé, les racines de l'équation proposée sont

---

(*) Nous avons indiqué cette équation dans une étude sur la cycloïde (N. C. M., t. V, p. 350). D'après cette équation, la cycloïde peut être considérée comme une courbe corrélative de la spirale d'Archimède; de même, la tractrice est corrélative de la spirale logarithmique (Cesáro, *Mathesis*, t. II, p. 217).

(**) Voir N. A. M. 1885, (3), IV, pp. 144 et 256. Nous croyons utile de rappeler ici les propriétés de la *tram-motion* (comparer le remarquable article de M. Mannheim dans les N. A. M. 1878, (2), XVII, p. 321) : *Lorsqu'un plan* P *glisse sur un autre plan* P', *de manière que deux points* A *et* B *de* P *décrivent deux droites a et b de* P', *il existe, dans le plan mobile, une circonférence* (C) *dont les points décrivent des droites; les autres points de* P *décrivent des ellipses dont les axes ont pour somme ou différence constante le double du diamètre de* (C); *les diamètres de* (C) *enveloppent des hypocycloïdes à quatre rebroussements; les autres droites du plan* P *enveloppent des développantes de telles hypocycloïdes.* La courbe considérée par M. d'Ocagne est l'enveloppe d'une tangente au cercle mobile (C).

Digitized by Google

les cotes des points d'intersection de la solutive, avec la droite dont les coordonnées parallèles sont les valeurs des coefficients u, v de l'équation proposée.

L'ouvrage que nous analysons se termine par trois notes dont la dernière relative aux transformations axiales, nous paraît susceptible de développements intéressants.

Cet aperçu sommaire de l'ouvrage de M. d'Ocagne montre suffisamment que l'auteur a traité avec talent des sujets instructifs. Aussi n'hésitons-nous pas à en recommander l'étude à nos abonnés : ils y trouveront l'occasion d'élargir leurs connaissances mathématiques, en se familiarisant avec des idées qui sont à peine effleurées dans les manuels et qui, cependant, interviennent très souvent dans les applications. (J. NEUBERG.)

Traité d'Analyse par H. LAURENT, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome I. Calcul différentiel. Applications analytiques et géométriques. Paris, Gauthier-Villars, 1885. Un volume in-8° de XI, 392 pages. Prix : dix francs.

SOMMAIRE : 1. Introduction. 2. Séries. 3. Dérivées. 4. Différences. 5. Différentielles des fonctions de plusieurs variables. 6. Dérivées, différences et différentielles des fonctions de plusieurs variables. 7. Déterminants fonctionnels et fonctions implicites. 8. Fonctions d'une variable imaginaire. 9. Changement de variable. 10. Théorie des substitutions linéaires. 11. Elimination. 12. Maxima et minima. 13. Expressions indéterminées.

Comme on le voit, ce volume contient deux chapitres d'algèbre (10 et 11 ; 120 pages); mais on n'y trouve pas les applications géométriques du calcul différentiel promises dans le titre.

Le premier volume du Traité de M. Laurent renferme maints développements analytiques que l'on ne trouve pas dans les manuels moins étendus de Duhamel, de Sturm et de Serret, par exemple, sur les déterminants fonctionnels. A ce titre, il pourra être utile aux professeurs qui n'ont pas le temps ou l'occasion de consulter les grands mémoires originaux. Mais les questions de principe n'y sont pas traitées avec la rigueur que l'on est en droit d'exiger aujourd'hui en analyse. (P. M.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 204.

(Voir *Mathesis*, t. III, pp. 23, 116, 191.)

Soient O *un point d'une circonférence*, OB *le diamètre*, OA *une corde. On projette* A *en* C *sur* OB, C *en* D *sur* OA, D *en* M *sur* AC. *Lieu de* M *et quadrature de cette courbe.* (H. BROCARD.)

Troisième solution. En adoptant les notations de M. E. Cesàro (*), on

---

(*) Soient V l'intersection de la corde AA′ parallèle à OB avec le rayon SV per-

Digitized by Google

voit qu'il suffit de joindre OV pour déterminer sur AM et A'M' les points m, m', de l'énoncé 35 de M. Mister (T. I, p. 128-129). Or, cette dernière courbe a pour surface celle du cercle donné ; la courbe (M) a donc une surface moitié moindre.

Notes. I. Je m'étais proposé de chercher si cette courbe pouvait être la podaire d'une cissoïde par rapport à son point de rebroussement, ou une courbe déduite de cette podaire par voie d'augmentation ou de réduction de ses ordonnées. Je me suis assuré que le rapport des ordonnées des points de cette podaire et de la courbe (M) correspondant à une même abcisse n'est pas constant.

II. La courbe (M) a pour équation

$$y = \sqrt{x^5 - x^4}$$

en supposant $R = \frac{1}{2}$. L'aire de la courbe a alors pour expression

$$\int_0^1 \sqrt{x^5 - x^4}\, dx = \frac{\pi}{8},$$

intégrale déterminée déjà par M. O. Bonnet (N. A. M. 1844, p. 75.)

(H. Brocard.)

×Question 344.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 143.)

Soient, dans la suite des nombres impairs, S_α *la somme des* α *premiers termes;* S_β *celle des* β *termes suivants;* S_γ *celle des* γ *termes qui suivent les* $\alpha + \beta$ *premiers; déterminer* α, β, γ *de manière que*

$$S_\alpha S_\beta = S_\gamma.$$

(de Rocquigny.)

Solution par M. E. Cesàro. Nous revenons sur cette Question, résolue à la page 20, pour répondre à la demande : « *Y a-t-il d'autres solutions?* », faite par M. Van den Broeck. Ayant posé $\alpha = x$, $\alpha + \beta = y$, $\alpha + \beta + \gamma = z$, il s'agit de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 (y^2 - x^2) = z^2 - y^2,$$

---

pendiculaire à OB; K le milieu de SV; C, C' les projections de AA' sur OB. La droite OK rencontre AC, A'C' en deux points M, M' appartenant à la courbe de la question 204 (Cesàro, *Mathesis*, III, 191.)

Digitized by Google

de manière que $x < y < z$. M. Van den Broeck indique la solution évidente

$$x = \alpha, \quad y = \alpha^2, \quad z = \alpha^3,$$

où α est un entier quelconque. Il y a une infinité d'autres solutions :

1° L'équation proposée résulte de l'élimination de n entre les équations

$$y^2 - x^2 = n, \quad z^2 - (n+1)x^2 = n.$$

Ayant donné à n une valeur entière quelconque, on résoudra la première équation, en retenant seulement les solutions pour lesquelles $(n+1)x^2 + n$ est un carré parfait. On reconnaîtra que n ne peut recevoir toutes les valeurs. Ainsi, en dessous de 30, il n'y a que les valeurs 9, 12, 16, 24, qui donnent lieu à des solutions satisfaisantes. On trouve :

$x = 4, 2, 3, 1, \ldots.$	$\alpha = 4, 2, 3, 1, \ldots.$
$y = 5, 4, 5, 5, \ldots.$	$\beta = 1, 2, 2, 4, \ldots.$
$z = 13, 8, 13, 7, \ldots.$	$\gamma = 8, 4, 8, 2, \ldots.$

Le système signalé par M. Van den Broeck donne seulement les solutions, pour lesquelles n a la forme $\alpha^2(\alpha^2 - 1)$, c'est-à-dire $n = 12$, 72, 240, 600,.....

2° Dans le même système il n'y a pas de solution satisfaisante, pour laquelle x soit égal à l'unité. Or, il y a une infinité de solutions analogues. Ce sont, évidemment, les solutions de l'équation $2y^2 - z^2 = 1$. Soit u_n le $n^{ième}$ terme de la série.

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, \ldots$$

obéissant à la loi $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$. On aura

$$\alpha = 1, \quad \beta = u_{2n+1} - 1, \quad \gamma = u_{2n}.$$

On obtient ainsi les solutions

$$\alpha = 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ \ldots.$$
$$\beta = 4, \ 28, \ 168, \ 984. \ 5740, \ \ldots.$$
$$\gamma = 2, \ 12, \ 70, \ 408, \ 2378, \ \ldots.$$

3° Pour une valeur *donnée* de α, le système indiqué par M. Van den Broeck contient *une seule* solution. Cela étant, soit

$$x = \alpha, \quad y = \alpha^2 y_1, \quad z = \alpha^2 z_1.$$

L'équation considérée devient

$$(\alpha^2 + 1)y_1^2 - z_1^2 = 1.$$

Digitized by Google

M. Van den Broeck donne la solution $y_1 = 1$, $z_1 = \alpha$. On peut en déduire une infinité d'autres contenues dans les formules

$$y_t = \frac{[\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha]^{2n+1} + [\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha]^{2n+1}}{2\sqrt{\alpha^2+1}},$$

$$z_t = \frac{[\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha]^{2n+1} - [\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha]^{2n+1}}{2}.$$

On trouve ainsi, après avoir pris α arbitrairement,

$\beta = \alpha(\alpha-1)$, $\gamma = \alpha^2(\alpha-1)$,

$\beta = \alpha(4\alpha^3+\alpha-1)$, $\gamma = \alpha^2(4\alpha^3-4\alpha^2+3\alpha-1)$,

$\beta = \alpha(16\alpha^5+12\alpha^3+\alpha-1)$, $\gamma = \alpha^2(16\alpha^5-16\alpha^4+20\alpha^3-12\alpha^2+5\alpha-1)$,

. . . . . .

---

*Question 376.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 216.)

Soient B′, C′ *les projections des sommets* B, C *d'un triangle* ABC *sur la bissectrice de l'angle* A. *Démontrer* 1° *que les perpendiculaires abaissées de* A, B′, C′ *sur* BC, CA, AB *sont concourantes*; 2° *que la tangente commune aux cercles qui ont pour diamètres les côtés* AB, AC *est moyenne proportionnelle entre* BB′ *et* CC′. (Cl. Thiry.)

Solution par M. Colette. 1° Soient B″ la projection de B′ sur AC, C″ celle de C′ sur AB, D le point de rencontre de la hauteur AH avec la droite B′B″. On trouve aisément

$$AD = \frac{AB''}{\sin C} = \frac{AB'\cos\frac{1}{2}A}{\sin C} = \frac{AB\cos^2\frac{1}{2}A}{\sin C} = 2R\cos^2\tfrac{1}{2}A,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC. Cette formule démontre que C′C″ coupe AH au même point D.

2° Désignons par t la longueur de la tangente commune aux cercles qui ont pour diamètres les côtés AB, AC. La distance des centres et les rayons de ces cercles étant $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b$, on a

$$t^2 = \frac{a^2-(b-c)^2}{4} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4} = \frac{-2bc\cos A+2bc}{4}$$

$$= bc\sin^2\frac{A}{2} = CC'.BB.$$

Digitized by Google

Autres démonstrations de la première partie (*). *a*) Les quadrilatères BB'C'C'', B'B''CC' étant inscriptibles, on a

$$AB.AC'' = AB'.AC' = AB''.AC.$$

Donc le quadrilatère BB''CC'' est également inscriptible. Soit D le point de rencontre de B'B'' et C'C''. Dans le quadrilatère inscriptible AC''DB'',

$$\text{angle } C''AD = DB''C'' = \tfrac{1}{2}\pi - AB''C'' = \tfrac{1}{2}\pi - ABC.$$

Donc AD est perpendiculaire à BC (Meurisse, Gob, Verniory, Laurens de Cambrai, Jules Collin).

b) Les droites B'B'', C'C'' rencontrent respectivement AB, AC aux points β, γ. On a, par des quadrilatères inscriptibles,

$$AB.AC'' = AB'.AC' = AB''.AC, \quad AC''.A\beta = AB''.A\gamma;$$

d'où

$$\frac{AB}{A\beta} = \frac{AC}{A\gamma}.$$

Donc la droite $\beta\gamma$ est parallèle à BC. Dans le triangle $A\beta\gamma$, les droites $\beta B''$, $\gamma C''$ sont deux hauteurs; donc AD est la troisième hauteur, etc (Servais, Boedt).

c) H étant le pied de la hauteur issue de A, il suffit de démontrer l'égalité

$$\overline{AB''}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{BC''}^2 = \overline{CB''}^2 + \overline{AC''}^2 + \overline{BH}^2. \qquad (1)$$

Or

$$AB'' = AB' \cos\frac{A}{2} = AB \cos^2\frac{A}{2} = \frac{c\,(1 + \cos A)}{2}, \quad AC'' = \frac{b\,(1 + \cos A)}{2},$$

$$CB'' = b - \frac{c\,(1 + \cos A)}{2}, \quad BC'' = c - \frac{b\,(1 + \cos A)}{2},$$

$$BH = c \cos B, \quad CH = b \cos C.$$

Ces valeurs vérifient la relation (1) (Farisano).

(*) MM. Meurisse, Gob, Verniory, Laurens, Servais, Farisano, Deprez, Collin, Boedt ont également démontré la seconde partie de la question, à peu près comme M. Colette. M. Verniory signale la relation $ABC = 2\sqrt{AB'.ACC'}$ qui est comprise dans un théorème connu, si l'on considère les triangles formés par AB, AC avec BB' ou CC' suffisamment prolongés.

Digitized by Google

d) Si l'on prend pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle A, les équations des perpendiculaires abaissées de A, B′, C′ sur BC, AC, AB sont

$$y = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A \frac{c+b}{c-b} x, \quad y - c \cos \tfrac{1}{2} A = - x \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A,$$

$$y - b \cos \tfrac{1}{2} A = x \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A.$$

Éliminant le terme connu entre les deux dernières, on obtient la première, etc. (Deprez).

Note. Dans la première partie du théorème de M. Thiry, on peut remplacer la bissectrice de l'angle BAC par une droite quelconque menée par A; c'est ce qui résulte de la première démonstration légèrement modifiée, ainsi que des deux qui la suivent.

Voici encore une solution dont le principe est dû à M. Deprez. Soient AH la hauteur de ABC, B_1 et C_1 les points de rencontre de BB′ avec AC, et de CC′ avec AB; à cause de BB′ : B′B_1 = C_1C′ : C′C, la parallèle à AC par B′, et la parallèle à AB par C′ se rencontrent en un point M de BC.; les angles B′HM et B′C′M étant égaux à BAB′, le quadrilatère MB′HC′ est inscriptible, et les perpendiculaires menées par H, B′ C′ sur HM, B′M (ou CA), C′M (ou AB) concourent au point diamétralement opposé à M.

Cette généralisation, qui a été remarquée par M. Meurisse, nous a rappelé un théorème un peu plus général que nous avons énoncé dans la N. C. M., II, 189, 281, 316; IV, 379, et qui a été également signalé par MM. Marchand et Lemoine dans le *Journal de Bourget* (Mathématiques élémentaires) 1884, p. 49. Voici ce théorème, qui est étendu à l'espace dans la question 454 :

Soient A′, B′, C′ *les projections des sommets du triangle* ABC *sur une droite quelconque* D. *Les droites* A′α, B′β, C′γ *respectivement perpendiculaires sur* BC, CA, AB *passent par un même point.*

Pour ramener cette proposition au cas où la droite D passe par A, M. Gob imprime au triangle ABC une translation mesurée en grandeur et en direction par AA′. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 422.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Soient A′, B′, C′ *les symétriques des sommets d'un triangle* ABC *par rapport au centre* O *du cercle circonscrit, et soient* A″, B″, C″ *les symétriques de ces sommets par rapport aux perpendiculaires élevées aux milieux des côtés opposés. Démontrer* 1° *que les circonférences* A′A″O, B′B″O, C′C″O *se coupent en un même point* O′; 2° *que le point* O′ *décrit une circonférence lorsque la base* BC *est fixe et l'angle* A *constant.* (A. LAMBERT.)

Solution par MM. LAMBERT, GOB *et* BLONDEEL. Les hauteurs du triangle ABC se coupent en un même point H qui décrit une circonférence (H), lorsque A se déplace sur le cercle O. Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle d'inversion le centre O du cercle ABC et pour puissance $-\overline{OB}^2$. Les transformées des hauteurs seront les circonférences A′OA″, B′OB″, C′OC″ qui passent par le pôle et par les inverses des points où les hauteurs rencontrent la circonférence O; ces lignes se coupent au point O′ homologue de H, etc.

Autres solutions. 1° Les droites A′A″, B′B″, C′C″, hauteurs du triangle A′B′C′ se coupent en un même point H′; il est d'égale puissance par rapport aux cercles A′OA″, B′OB″, C′OC″. Donc la droite OH′ rencontre ces cercles en un même point O′. (D'HONDT et VERNIORY.)

Les pôles A‴, B‴, C‴ des droites A′A″, B′B″, C′C″ sont situés sur la polaire de H′ par rapport au cercle O. Les droites OA‴, OB‴, OC‴ étant des diamètres des cercles OA′A″, OB′B″, OC′C″, ceux-ci passent par la projection de O sur la droite A‴B‴. (JEŘABEK.)

2° Le triangle isoscèle A″OA′ étant inscrit dans le cercle A″OA′O′, on a

$$\overline{OA''}^2 = OO'.OH' = \text{const.}$$

Donc, si le point H′ décrit une circonférence, il en sera de même du point O′ (*). (D'HONDT.)

(*) Nous supprimons ici un raisonnement bien connu. M. D'Hondt a remarqué avec raison qu'il aurait été plus simple d'énoncer le théorème 422 sans faire intervenir le triangle ABC. (J. N.)

Digitized by Google

Des égalités

angle $B'O'O = B''B'B = \pm(A - C)$, angle $C'O'O = C''C'C = \pm(A - B)$

on déduit, par addition ou soustraction, que l'angle $B'O'C'$ est constant.

(Jeřabek et Verniory.)

×Question 423.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Soient $A'B'C'$ *le triangle formé par les tangentes menées aux sommets d'un triangle* ABC *inscrit dans le cercle* O, A'', B'', C'' *les points de rencontre du cercle avec les droites* AA', BB', CC'; A''', B''', C''' *les milieux des côtés du triangle* ABC. *Démontrer que les circonférences* $AA''A'''$, $BB''B'''$, $CC''C'''$ *se coupent aux deux mêmes points.* (A. Lambert.)

Solution par MM. Lambert, Gob *et* Blondeel. On sait que les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point K. Prenons pour pôle d'inversion le centre O du cercle ABC, et pour puissance le carré du rayon. Les points A, B, C, A'', B'', C'' sont leurs propres homologues; les inverses de A', B', C' sont A''', B''', C'''; car dans les triangles rectangles OBA', OCB', OBC', on a

$$R^2 = OA'.OA''' = OB'.OB''' = OC'.OC'''.$$

Il en résulte que les inverses des symédianes sont les cercles $AA'''A''$, $BB'''B''$, $CC'''C''$, qui passent par le pôle d'inversion O et par l'homologue du point de Lemoine K.

Solution par MM. Verniory, Deprez *et* D'Hondt. Si CA''' est la hauteur du triangle rectangle COA, l'on a

$$A'A'''.A'O = \overline{AC}^2 = A'A''.A'A;$$

donc la circonférence $AA'''A''$ passe par O, et il en est de même des circonférences $BB'''B''$, $CC'''C''$. Si K est le point de concours des droites AA', BB', CC', on a aussi

$$KA.KA'' = KB.KB'' = KC.KC''$$

d'où l'on déduit facilement que les trois circonférences coupent la droite OK en un même deuxième point O'.

Solution par MM. Jeřabek *et* Boedt. Soient α, β, γ les points d'intersection des côtés homologues des triangles ABC, A'B'C'; ces points

Digitized by Google

sont en ligne droite. Le point α, intersection des polaires de A et A' est le pôle de AA'; donc la tangente en A'' au cercle O est A''α. On en conclut que la circonférence décrite sur αO comme diamètre passe par A et A'. Elle passe aussi par la projection A''' de O sur BC, et par l'intersection O' des droites perpendiculaires OK et $\alpha\beta\gamma$ ($\alpha\beta\gamma$ est la polaire de K). Par analogie, les circonférences BB'''B'', CC'''C'' contiennent également les points O et O'.

Question 424.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Faire un changement de plan de projection tel que les nouvelles traces d'un plan (P, P'), ***se confondent sur l'épure en une même droite.***

(J. Smeets.)

Solution par MM. Renson *et* Henrard. *a*) Les nouvelles traces sont confondues, lorsqu'on prend une ligne de terre située dans le plan donné. Par exemple, on conserve le plan horizontal de projection et l'on adopte un nouveau plan vertical passant par P.

b) Supposons le plan (P, P') perpendiculaire au deuxième plan bissecteur des nouveaux plans de projection. Il suffit de choisir convenablement un nouveau plan vertical de projection. Car si (a, a') est un point de l'ancienne trace verticale P' et ax la nouvelle ligne de terre encore inconnue; on aura la nouvelle trace verticale P'_1 du plan proposé, en joignant le point de rencontre x de ax avec P, à l'extrémité a'_1 d'une perpendiculaire aa'_1 menée par a sur ax et égale à aa' Le problème sera donc résolu, si a'_1 tombe sur P. Par suite, après avoir pris un point quelconque (a, a') sur P', on décrira de a comme centre avec le rayon aa' un arc de cercle coupant P en deux points a'_1 et a'_2; les perpendiculaires élevées par a sur les droites aa'_1 ou aa'_2 sont les nouvelles lignes de terre.

Cette solution serait impossible, si le sinus de l'angle de P avec l'ancienne ligne de terre était plus grand que la tangente de l'angle de P' avec cette ligne. Mais alors il suffit d'intervertir les rôles des plans de projection.

On peut encore amener le plan (P,P') à être plan de profil, ce qui exige deux changements de projections et est un problème bien connu.

Autre solution par MM. Jules Collin et Boedt.

Digitized by Google

×Question 448.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 144.)

Dans tout triangle ABC :

$$\sin^3 A \cos(B - C) + \sin^3 B \cos(C - A) + \sin^3 C \cos(A - B) = 3 \sin A \sin B \sin C. \qquad \text{(Brill.)}$$

Solution par MM. J. Gillet *et* d'Hondt. On obtient successivement

$$2 S \sin^3 A \cos(B - C) = 2 S \sin^2 A \sin(B + C) \cos(B - C)$$
$$= S \sin^2 A [\sin 2B + \sin 2C] = S (\sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A)$$
$$= 2 S \sin A \sin B (\sin A \cos B + \sin B \cos A) = 6 \sin A \sin B \sin C.$$

Remarques dues à M. Gillet. I. Le théorème a lieu pour $A + B + C = k\pi$.

II. On peut remplacer A, B, C par $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, $\frac{1}{2}\pi - \beta$, $\frac{1}{2}\pi - \gamma$, pourvu que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{4}(2n + 1)\pi$; alors

$$S \cos^3 \alpha \cos(\beta - \gamma) = 3 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

III. Si l'on combine la formule de M. Brill avec la suivante

$$S \sin A \cos(B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

on trouve

$$3 S \sin A \cos(B - C) = 4 S \sin^3 A \cos(B - C)$$

ou

$$S \sin 3A \cos(B - C) = 0.$$

Solution par M. Verniory. Le premier membre de la formule se ramène à

$$S \sin A (1 - \cos^2 A)(\cos B \cos C + \sin B \sin C) =$$
$$S \sin A \cos B \cos C - \tfrac{1}{2} \cos A \cos B \cos C \, S \sin 2A + 3 \sin A \sin B \sin C$$
$$- \sin A \sin B \sin C \, S \cos^2 A.$$

Mais

$$\sin(A + B + C) = S \sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C = 0,$$
$$S \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C, \quad S \cos^2 A = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C, \text{ etc.}$$

MM. E. Gelin Lambert et Choisis ont également résolu la question au moyen de transformations trigonométriques. M. Deprez vérifie la formule proposée en exprimant tous les termes en fonction des côtés du triangle.

Digitized by Google

×Question 449.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 144.)

1° *Soient* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *les angles sous lesquels on voit d'un point intérieur* P *les côtés d'un carré* ABCD. *Démontrer les relations*

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = 1,$$
$$(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\gamma)^{-1} = 1. \qquad \text{(Miller.)}$$

2° *On a encore la dernière formule, lorsque* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *désignent les angles* PAB, PCD, PBA, PDC (*). (Simmons.)

Solution par MM. E. Gelin, Deprez, Falisse *et* Choisis. 1° Soient

$$PX = x, \quad PY = y, \quad PZ = z, \quad PU = u$$

les perpendiculaires abaissées de P sur AB, BC, CD, DA; nous aurons aussi $AX = u$, $BX = y$, etc. On trouve facilement, a désignant le côté du carré,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(APX + BPX) = \frac{ax}{x^2 - uy},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{az}{z^2 - uy}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{ay}{y^2 - xz}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{au}{u^2 - xz};$$

d'où

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} = \frac{(x^2 - uy)(z^2 - uy)}{a^2(xz - uy)},$$

$$(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} = \frac{xz}{xz - uy}, \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = \frac{xz(u^2 + y^2) - uy(x^2 + z^2)}{a^2(xz - uy)}$$
$$= \frac{xz(a^2 - 2uy) - uy(a^2 - 2xz)}{a^2(xz - uy)} = 1,$$
$$(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\gamma)^{-1} = 1.$$

2° Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant les angles PAB, PCD, PBA, PDC, on a :

$$a = AX + BX = x(\cot\alpha + \cot\gamma) = z(\cot\beta + \cot\delta),$$
$$= y(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta) = u(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta),$$

(*) L'énoncé du 2° manquait de clarté; nous le modifions en conséquence. (J. N.)

Digitized by Google

d'où, à cause de $x + z = a = u + y$:

$$(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\delta)^{-1} = 1,$$
$$(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta)^{-1} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = 1$$

Généralisation par M. DEPREZ. Remplaçons le carré par un rectangle dont les côtés sont $AB = c$, $AC = b$. L'une des formules de M. Miller sera généralisée par celle-ci :

$$\frac{b}{a}(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + \frac{a}{b}(\cot\beta + \cot\delta)^{-1} = 1.$$

et celles de M. Simmons par les suivantes :

$$(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\delta)^{-1} = \frac{b}{a},$$

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} = \frac{a}{b}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

473. Il existe une infinité de triangles inscrits à un même cercle et ayant même point de Lemoine. Démontrer que ces triangles sont circonscrits à une même conique dont les foyers sont les points de Brocard de ces mêmes triangles. (J. NEUBERG.)

×**474.** Trouver sur un plan donné P le point dont la somme des distances à deux droites données soit minimum. (PICARD.)

×**475.** Démontrer que les n^{es} réduites des fractions continues

$$(2, 2, 2, \ldots), \quad (2, -2, -2, -2, \ldots.)$$

ont pour valeurs respectives

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2}^{n})}, \quad \frac{n+1}{n}. \qquad \text{(HAMMOND.)}$$

×**476.** Faire voir que les trois équations

$$a^2(x^2 + xy + y^2) - axy(x + y) + x^2y^2 = 0,$$
$$a^2(y^2 + yz + z^2) - ayz(y + z) + y^2z^2 = 0,$$
$$a^2(z^2 + zx + x^2) - azx(z + x) + z^2x^2 = 0,$$

ne sont pas indépendantes. (YOUNG.)

×**477.** Résoudre le système

$$x^3 - a = y^3 - b = z^3 - c = xyz. \qquad \text{(MORLEY.)}$$

Digitized by Google

478. Démontrer que les anomalies excentriques des extrémités d'une corde normale à une ellipse vérifient l'égalité

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad \text{(ANTHONY.)}$$

479. Etant donnés n points quelconques $A_1, A_2, \ldots A_n$, soient A_{n+1} leur centre des moyennes distances; A_{n+2} le centre des moyennes distances des points $A_2, A_3, \ldots A_n, A_{n+1}$; A_{n+3} celui des points $A_3, A_4, \ldots, A_{n+1}, A_{n+2}$, et ainsi de suite. Démontrer que les points $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ ont pour limite le centre de gravité des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ chargés respectivement des poids 1, 2, 3, ..., n. (J. NEUBERG.)

×**480.** Soient A', B', C' les points où les médianes m, m', m'' d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite. Démontrer que

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{(m^2 + m'^2 + m''^2)^3}{27m^2m'^2m''^2}. \qquad \text{(J. NEUBERG.)}$$

×**481.** Si, dans le triangle ABC, $B - C = \frac{1}{2}\pi$, on a la relation

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}. \qquad \text{(MC. ALISTER.)}$$

×**482.** Résoudre le système

$$\begin{aligned} (x + 2y)(x + 2z) &= a^2, \\ (y + 2x)(y + 2z) &= b^2, \\ (z + 2x)(z + 2y) &= c^2. \end{aligned} \qquad \text{(MORLEY.)}$$

×QUESTIONS D'EXAMEN.

208. Dans tout quadrilatère *étoilé* ABCD, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme dont l'aire vaut la demi-différence des aires des triangles composant le quadrilatère.

Prolonger les côtés qui sont parallèles à AC jusqu'à leur rencontre avec BD, et considérer le premier parallélogramme comme la différence des deux autres parallélogrammes valant $\frac{1}{2}$ ADB, $\frac{1}{2}$ CDB.

209. Le triangle qui a pour sommets les milieux des diagonales d'un quadrilatère et le point de concours de deux côtés opposés vaut le quart du quadrilatère. *Corollaire.* Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

Décomposer le triangle (par addition ou par soustraction) en trois autres ayant pour bases les côtés de ce triangle et pour sommet commun un sommet du quadrilatère ou le milieu d'un côté.

Digitized by Google

210. Construire un carré, connaissant la somme du côté et des deux diagonales.

211. Soient un triangle ABC rectangle en A, AD la hauteur, E et F les centres des cercles inscrits aux triangles ABD, ACD; si l'on mène EE′ et FF′ parallèles à AD et rencontrant respectivement AB, AC en E′ et F′, démontrer que AE′ = AF′.

212. Si l'on dispose la suite des nombres entiers :

1;
2, 3, 4, 5, 6, 7;
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17;
. . . . . .

en groupes renfermant respectivement 2, 6, 10, 14, ... termes, la somme des termes de chaque groupe est un cube impair. (De Rocquigny.)

213. On dispose les nombres $4n + 1$ de la manière suivante :

1;
5, 9, 13;
17, 21, 25, 29, 33; etc.

La somme des termes d'une horizontale est un cube impair.

(De Rocquigny.)

214. La somme des n premiers cubes impairs est la somme de n impairs consécutifs. (De Rocquigny.)

215. Construire un trapèze ABCD, connaissant les diagonales AC, BD, l'angle de ces droites et l'angle AEB des côtés non parallèles.

Si M, N, P sont les milieux de AD, DC, CB, il sera facile de construire le quadrilatère EMNP dans lequel EN passe par le milieu de MP. (Cl. Thiry.)

216. Soient dans le triangle ABC, A′ et P deux points fixes de BC, B′ et C′ les points où les droites BM, CM menées par un point quelconque M de la droite AA′ coupent AC, AB; démontrer que le rapport des aires PB′C′, A′B′C′ est constant.

Si B′C′ rencontre BC en Q, le point Q est fixe, et PB′C′ : A′B′C′ = PQ : A′Q.

(Cl. Thiry.)

217. Soient t_a, t_b, t_c les longueurs des tangentes communes aux trois circonférences décrites sur les côtés du triangle ABC comme diamètres, et l la longueur interceptée sur la ligne des centres de deux de ces circonférences par ces mêmes courbes. On aura

$$S = \sqrt{t_a t_b t_c l}.$$

(J. Deprez.)

Digitized by Google

SUR LE QUADRILATÈRE HARMONIQUE;

par M. J. NEUBERG.

(*Suite*, voir pages 202, 217).

8. Le point E jouit de la propriété que la somme des carrés de ses distances aux côtés de ABCD est minimum(*). C'est ce que l'on voit immédiatement au moyen de l'identité

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+u^2)=(ax+by+cz+du)^2 + (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+\cdots$$

où le terme $ax+by+cz+du$ a pour valeur constante 2ABCD.

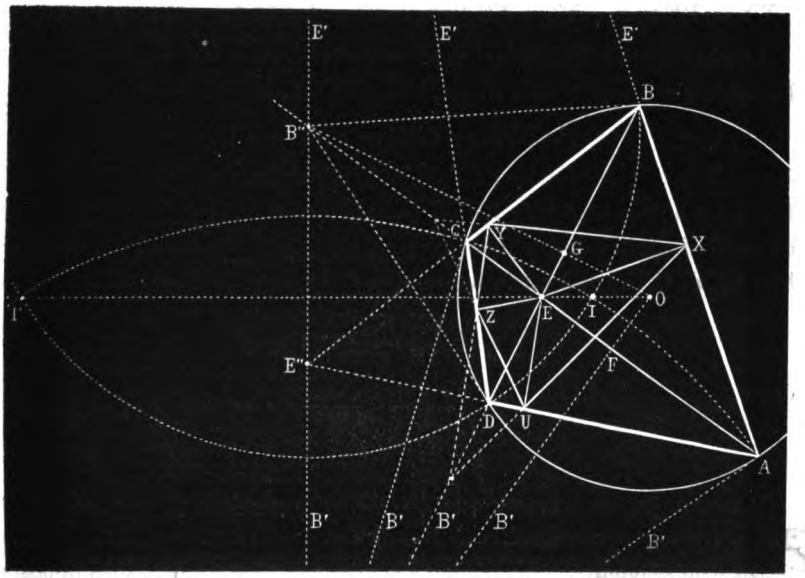


Fig. 1.

Ce point est aussi le centre de l'ellipse, lieu des points dont la somme des carrés des distances aux côtés de ABCD égale une quantité donnée.

(*) La figure 1 peut servir pour l'étude des nos 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Au no 2, il faut remplacer la lettre F par F_1, au no 4, X, Y, Z, U, par X_1, Y_1, Z_1, U_1, parce que F, X, Y, Z, U ont une autre signification ultérieurement. Les lettres F_1, X_1, Y_1, Z_1, U_1 et N, ne sont pas marquées sur la figure.

Digitized by Google

9. Le quadrilatère XYZU jouit de quelques propriétés remarquables. Les droites EX, EY, EZ, EU étant proportionnelles et perpendiculaires aux côtés d'un polygone fermé ABCD, la somme de leurs projections sur un axe quelconque Ex, ou, ce qui est la même chose, la somme des distances des points X, Y, Z, U à un axe Ey perpendiculaire à Ex est nulle. Par conséquent, *le point* E *est le centre des moyennes distances de* X, Y, Z, U.

Les côtés du quadrilatère XYZU *sont perpendiculaires et proportionnels aux médianes* BF, CG, DF, AG. Car, les triangles EXY et CNB, par exemple, ont deux couples de côtés perpendiculaires et proportionnels; les troisièmes côtés XY et CN sont donc également perpendiculaires et dans le même rapport ($\frac{1}{2}$ tg φ : 1). D'après cela :

$$XY = BF \operatorname{tg}\varphi, \quad YZ = CG \operatorname{tg}\varphi, \quad ZU = DF \operatorname{tg}\varphi, \quad UX = AG \operatorname{tg}\varphi.$$

Le quadrilatère XYZU *est circonscriptible à un cercle de centre* E(*). En effet, des quadrilatères inscriptibles EXBY, EYCZ, on déduit

$$\text{angle } EYX = EBX = ECD = EYZ;$$

donc EY est la bissectrice de l'angle XYZ, et, par analogie, les bissectrices des autres angles de XYZU passent également par E. Le rayon ρ' du cercle inscrit à ce quadrilatère peut se déduire des triangles semblables EXY, CNB; si h est la hauteur de CNB issue de C, on a

$$\frac{\rho'}{h} = \frac{EX}{AB} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi;$$

donc

$$\rho' = \tfrac{1}{2} h \operatorname{tg}\varphi = \frac{ABC}{2AF} \operatorname{tg}\varphi.$$

Remarquons, en passant, que *les distances de* A *et* C *aux médianes* BF *et* DF *sont égales à celles de* B *et* D *aux médianes* AG *et* CG.

On peut démontrer directement l'égalité des sommes des côtés opposés de XYZU. En effet, EB étant le diamètre du cercle circonscrit au triangle EXY, on a

$$XY = EB \sin B, \quad ZU = ED \sin B, \quad \text{etc};$$

d'où

$$XY + ZU = BD \sin B = 2R \sin A \sin B = YZ + XU,$$

(*) Théorème connu, applicable à un quadrilatère inscriptible quelconque.

Digitized by Google

et

$$BF + DF = AG + CG = 2R \sin A \sin B \cot \varphi.$$

L'angle BGC étant égal à ADC, la distance de B à CG ou h est égale à $\frac{1}{2}$ BD sin B; d'où

$$XY + ZU = YZ + XU = 2h, \quad BF + DF = 2h \cot \varphi.$$

Les côtés opposés du quadrilatère XYZU *se coupent sur les diagonales de* ABCD. Ce théorème résulte de ce que la bissectrice de l'angle formé par XY et ZU, est parallèle à celle de l'angle BFD dont les côtés sont perpendiculaires à XY et ZU : la première passant par E et la seconde étant AC, les deux droites se confondent (*).

10. *Les médianes* BF, CG, DF, AG *forment également un quadrilatère circonscriptible à un cercle de centre* O. On sait déjà que OF et OG sont les bissectrices extérieures des angles BFD, AGC. Deux médianes consécutives telles que BF et CG font, avec le côté BC, le même angle; donc elles se coupent sur la perpendiculaire élevée au milieu de ce côté, et O appartient à la bissectrice de leur angle, etc.

Le rayon du cercle inscrit au quadrilatère des médianes a pour valeur

$$OF \sin OFB = OF \cos BFC = 2R \cos B \cos A.$$

11. Nous appelons *cercle de Brocard*, du quadrilatère harmonique ABCD, le cercle décrit sur la droite OE comme diamètre, et *premier quadrilatère de Brocard*, le quadrilatère qui a pour sommets les points M, N, P, Q où le cercle de Brocard rencontre les perpendiculaires abaissées de O sur a, b, c, d (fig. 2).

Les droites EM, EN, EP, EQ sont évidemment parallèles à a, b, c, d; par conséquent, dans les triangles isoscèles ABM, BCN, CDP, DAQ, le rapport de la hauteur à la base est égal à $\frac{1}{2}$ tg φ, et l'angle à la base est φ.

Les lignes AM, BN, CP, DQ se rencontrent en un même point ω du cercle de Brocard. Car, les deux premières, par exemple, ayant même inclinaison sur AB et BC, font entre elles un angle $M\omega N = B = MON$; par suite, elles se coupent sur le cercle MON. De même, les lignes BM, CN, DP, AQ concourent en un autre point ω' de ce cercle.

(*) Cette propriété, ainsi que celles où interviennent les médianes BF, CG, etc. sont nouvelles; les autres propositions de ce § sont dues à M. Tucker.

Digitized by Google

Ces points remarquables ω, ω′ sont appelés *points de Brocard*, du quadrilatère harmonique; ils sont caractérisés par les égalités d'angles (*)

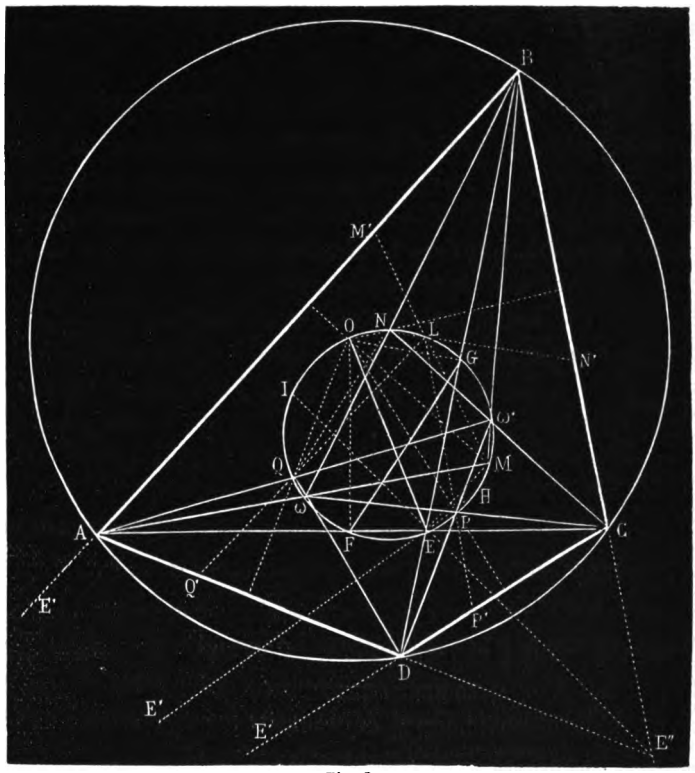


Fig. 2.

$$\omega AB = \omega BC = \omega CD = \omega DA,$$
$$\omega' BA = \omega' CB = \omega' DC = \omega' AD. \qquad (11)$$

(*) Pour qu'un quadrilatère ABCD admette un point ω satisfaisant aux égalités (11), il faut une équation de condition. Pour trouver celle-ci, remarquons que les triangles ω AB, ω BC donnent

$$a : \sin B = \omega B : \sin \varphi, \quad b : \sin C = \omega B : \sin (C - \varphi);$$

d'où, en éliminant ω B,

$$a : b \sin B = \operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} C.$$

Par analogie,

$$b : c \sin C = \operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} D.$$

En égalant les deux valeurs de cotg φ, on a la relation cherchée. On a aussi :

$$\omega A : \omega B = \sin (B - \varphi) : \sin \varphi, \quad \omega B : \omega C = \sin (C - \varphi) : \sin \varphi, \quad \text{etc.}$$

En multipliant membre à membre ces quatre proportions, on obtient

$$\sin (A - \varphi) \sin (B - \varphi) \sin (C - \varphi) \sin (D - \varphi) = \sin^4 \varphi.$$

Digitized by Google

On peut déterminer ω par l'intersection commune des quatre cercles qui passent, respectivement, par les extrémités d'un côté et touchent le côté suivant. Pareillement, les cercles passant par les extrémités d'un côté et touchant le côté précédent, se rencontrent en ω'.

De l'égalité des angles EOω, EMω, ABM, on conclut que la droite ωω' est perpendiculaire à EO, et que l'angle $\omega O\omega' = 2\varphi$.

Les droites MN et PQ sont vues de O sous des angles égaux à B; de même, les angles NOP, MOQ sont égaux à A. Par conséquent MN = PQ, NP = MQ. Les lignes MP et NQ sont parallèles à FG; car les angles MOF, GOP ont leurs côtés perpendiculaires à ceux des angles égaux CAB, BDC, de sorte que les arcs MF et PG du cercle de Brocard sont égaux.

12. Pour plus de facilité, désignons par f_a, f_b, f_c, f_d quatre figures semblables construites sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère harmonique, comme lignes homologues.

Nous savons déjà que le milieu F de AC est le centre de similitude de f_a et f_d, f_b et f_c. De même G est le point double de f_a et f_b, f_c et f_d. Ces points appartiennent, évidemment, au cercle de Brocard.

Soient H, I les points où ce cercle rencontre les droites EE', EE''. Je dis que H est le point double de f_a et f_c. En effet, les droites HM et HP passant par les points homologues M et P, sont également inclinées sur les lignes homologues OM et OP et leurs longueurs, proportionnelles aux distances de H à EM et EP, ou à celles de E à AB et CD, sont dans le rapport de similitude de f_a et f_c; par suite, H est son propre homologue dans les deux figures. De même, I est le centre de similitude de f_b et f_d.

Les points F, G, H, I sont les sommets du *second quadrilatère de Brocard*. Comme les rayons du faisceau (O, FGHI) sont perpendiculaires aux droites AC, BD, EE', EE'' qui forment un faisceau harmonique, les points F, G, H, I sont les sommets d'un quadrilatère harmonique.

13. Des propriétés importantes des deux quadrilatères de Brocard résultent de celles d'un système de trois figures semblables. Nous rappelons, d'abord, ces dernières(*), en les appliquant à f_a, f_b, f_c :

1° Le triangle formé par trois droites homologues α, β, γ est perspec-

(*) Pour la démonstration, nous renvoyons à un article de M. G. Tarry, publié dans *Mathesis*, t. II, p. 78.

Digitized by Google

tif avec le triangle FHG des points doubles; le centre de perspective est sur le *cercle de similitude* FHG.

2° Le triangle de trois points homologues est perspectif avec un triangle fixe (TRIANGLE INVARIABLE), inscrit au cercle FHG; le centre de perspective appartient également à ce cercle. Autrement dit, les droites joignant les sommets du triangle invariable à un point quelconque du cercle de similitude, forment un triple de droites correspondantes. Deux de ces triples étant (EM, EN, EP), (OM, ON, OP), le triangle invariable est MNP.

3° Le triangle invariable MNP est homologique avec le triangle FHG des points doubles.

4° Toute droite menée par le centre d'homologie K des triangles MNP, FHG rencontre les cercles HGK, GFK, FHK en trois points correspondants de f_a, f_b, f_c.

Les quatre systèmes formés par les figures f_a, f_b, f_c, f_d prises trois à trois, ont deux points doubles communs F, G, qui sont situés sur un même cercle avec les deux autres points doubles H, I. Cette circonstance donne lieu aux propositions suivantes (*) :

1° *Quatre droites homologues* α, β, γ, δ *de* f_a, f_b, f_c, f_d *forment un quadrilatère* $A_1B_1C_1D_1$ *semblable à* ABCD. *Les diagonales* A_1C_1, B_1D_1 *passent, respectivement par les points* F, G, *et se coupent en un point* E_1 *du cercle de Brocard de* ABCD; *si* E_1' *et* E_1'' *sont les points de rencontre des côtés opposés* α *et* γ, β *et* δ, *la droite* E_1E_1' *passe par* H, *et* E_1E_1'' *par* I.

2° *Les droites joignant un point quelconque* L *du cercle de Brocard aux sommets du premier quadrilatère de Brocard sont des lignes homologues de* f_a, f_b, f_c, f_d. *Elles rencontrent les côtés a, b, c, d du quadrilatère* ABCD *en des points homologues* M', N', P', Q' *et sont également inclinées sur ces côtés. On déduit, de là, que l'angle* M'LN', *par exemple, est égal à* π — B, *et comme* M'GN' *vaut aussi* π — B, *les cinq points* B, M', N', L, G *sont sur une même circonférence.*

Réciproquement, *si quatre points* M', N', P', Q' *divisent les côtés d'un quadrilatère harmonique* ABCD *dans le même rapport, les circonférences*

(*) Ces théorèmes sont nouveaux. Pour éviter une trop grande complication, la figure 2 ne contient pas toutes les lignes dont il est parlé dans le texte.

Digitized by Google

BM'N', CN'P', DP'Q', AQ'M' *passent par le milieu de l'une des diagonales et se coupent en un même point* L *du cercle de Brocard.*

Si l'on applique cette réciproque aux points d'intersection de a, b, c, d avec les lignes homologues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de f_a, f_b, f_c, f_d, les circonférences précitées sont celles qui déterminent le centre de similitude des deux quadrilatères semblables ABCD, $A_1B_1C_1D_1$. Donc *ce centre est sur le cercle de Brocard, de* ABCD (*). En particulier, les droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ peuvent être menées par A, B, C, D ou par B, C, D, A; alors elles forment un quadrilatère semblable à ABCD, et ayant pour centre de similitude, par rapport à ABCD, l'un des points de Brocard ω ou ω'.

3° *Les couples de triangles*

MNP, FHG; MQP, GHF; NMQ, FIG; NPQ, GIF

sont en perspective. Comme MP, NQ, FG sont parallèles, *les quatre centres d'homologie* K, K', K'', K''' *sont situés sur la perpendiculaire élevée au milieu de* FG.

4° La ligne KK' rencontre les cercles HGK, FGK, FHK en trois points correspondants de f_a, f_b, f_c. Le point correspondant de f_d est situé sur la même droite KK'; car les sommets des triangles semblables construits sur les côtés d'un polygone ont même centre des moyennes distances que les sommets de ce polygone (**), et le centre des moyennes distances de A, B, C, D est au milieu de la droite FG, point qui appartient aussi à la droite KK'.

Pareillement, on peut encore trouver sur KK' trois autres quadruples de points homologues de f_a, f_b, f_c, f_d.

14(***). Au moyen des triangles ωAB, ω'AB, ..., dans lesquels les angles autour de ω et ω' sont égaux à ceux du quadrilatère ABCD, on trouve aisément les formules

$$\begin{aligned} A\omega &= d \sin\varphi \operatorname{cosec} A, & A\omega' &= a \sin\varphi \operatorname{cosec} A, \\ B\omega &= a \sin\varphi \operatorname{cosec} B, & B\omega' &= b \sin\varphi \operatorname{cosec} B, \\ C\omega &= b \sin\varphi \operatorname{cosec} A, & C\omega' &= c \sin\varphi \operatorname{cosec} A, \\ D\omega &= c \sin\varphi \operatorname{cosec} B, & D\omega' &= d \sin\varphi \operatorname{cosec} B. \end{aligned}$$

(*) Généralisation d'un théorème dû à M. Casey.

(**) Théorème de M. Laisant (Congrès du Havre, 1877, pp. 142-154). Voir aussi N. C. M., 1880, t. VI, p. 473; *Mathesis*, t. I, p. 167 et t. II, p. 59 et 76-77.

(***) Les formules de ce n° sont empruntées à la Note de M. Tucker.

Digitized by Google

On en peut tirer beaucoup d'autres, par exemple :

$$A\omega.B\omega.C\omega.D\omega = A\omega'.B\omega'.C\omega'.D\omega' = 2R^4 \sin^4 \varphi,$$
$$A\omega.C\omega = A\omega'.B\omega', \quad B\omega.D\omega = B\omega'.D\omega',$$
$$A\omega.B\omega' = 2R^2 \sin^2 \varphi = B\omega.C\omega' = \ldots,$$
$$A\overline{\omega'}^2 + B\overline{\omega}^2 = a^2, \quad B\overline{\omega'}^2 + C\overline{\omega}^2 = b^2, \ldots.$$

La puissance de A par rapport au cercle de Brocard est égale à

$$AM.A\omega = \tfrac{1}{2} ad \operatorname{tang} \varphi \operatorname{cosec} A.$$

(*La fin au prochain numéro*).

SUR UN THÉORÈME DE M. MANSION;

par M. Ernest Cesàro (*).

M. Mansion a démontré que le déterminant de degré n, dont l'élément général est une fonction $F(r, s)$ du plus grand commun diviseur des indices r et s, est égal à $f(1)\, f(2) \ldots\ldots f(n)$, les fonctions f et F étant liées par l'égalité

$$F(r, s) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots\cdots,$$

où $a, b, c, \ldots\ldots$ représentent les diviseurs du plus grand commun diviseur de r et s. Ce théorème est une conséquence immédiate de la règle de multiplication des déterminants. Imaginons, en effet, une fonction $\rho(x)$, égale à 1 ou à 0, suivant que x est ou n'est pas un nombre entier. On peut écrire

$$F(r, s) = \sum_{i=1}^{i=n} f(i)\, \rho\left(\frac{r}{i}\right) \rho\left(\frac{s}{i}\right),$$

et l'on voit que $F(r, s)$ est le terme général du produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} \rho\left(\frac{1}{1}\right) & \rho\left(\frac{1}{2}\right) \cdots \rho\left(\frac{1}{n}\right) \\ \rho\left(\frac{2}{1}\right) & \rho\left(\frac{2}{2}\right) \cdots \rho\left(\frac{2}{n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho\left(\frac{n}{1}\right) & \rho\left(\frac{n}{2}\right) \cdots \rho\left(\frac{n}{n}\right) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f(1)\rho\left(\frac{1}{1}\right) & f(2)\rho\left(\frac{1}{2}\right) \cdots f(n)\rho\left(\frac{1}{n}\right) \\ f(1)\rho\left(\frac{2}{1}\right) & f(2)\rho\left(\frac{2}{2}\right) \cdots f(n)\rho\left(\frac{2}{n}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(1)\rho\left(\frac{n}{1}\right) & f(2)\rho\left(\frac{n}{2}\right) \cdots f(n)\rho\left(\frac{n}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

(*) Rectifications : P. 199, l. 10, au lieu de μ lire M; p. 201, dernière ligne, au lieu de $F_{(s)}^{(p)}$ lire $F^{(p)}(s)$.

Digitized by Google

Le second déterminant est égal au premier, multiplié par $f(1)f(2)\ldots f(n)$; mais le premier se réduit identiquement à l'unité, puisque chaque élément $\rho\left(\frac{r}{s}\right)$ est égal à zéro pour $r < s$, et à l'unité pour $r = s$. La propriété énoncée se trouve donc établie.

Remarques I. Le premier des deux déterminants écrits plus haut, jouit de propriétés fort curieuses. Nous abandonnons au lecteur la démonstration de celle-ci : « le complément algébrique (ou mineur) de l'élément $\rho\left(\frac{r}{s}\right)$ est nul, en général; mais il est égal à $(-1)^k$, lorsque s est le produit de r par k facteurs premiers, inégaux. » Ainsi, le complément en question sera égal à + 1, pour

$$s = r,\ 6r,\ 10r,\ 14r,\ 15r,\ 21r,\ 22r,\ \ldots\ .;$$

à — 1, pour

$$s = 2r,\ 3r,\ 5r,\ 7r,\ 11r,\ 13r,\ 17r,\ \ldots\ .;$$

à 0, dans les autres cas.

Remarque II. Le lecteur qui voudrait approfondir cet intéressant sujet de recherches pourra consulter les travaux suivants :

Smith, *On the Value of an Arithmetical Determinant* (Proceedings of the London Mathematical Society, v. VII, p. 108). Mansion, *On a Arithmetical Theorem of Professor Smith's* (Messenger of Mathematics, New Series, t. VII, p. 81). Mansion, *Sur la théorie des nombres* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. II, p. 214). Catalan, *Théorèmes de MM. Smith et Mansion* (Nouv. Corr. Math., t. IV, p. 103). Le Paige, *Sur un théorème de M. Mansion* (Nouv. Corr. Math., t. IV, p. 176). Cesáro, *Determinanti in Aritmetica* (Journal de Battaglini, 1885, p. 182). *Le Déterminant de Smith et Mansion* (Nouvelles Annales). *Intorno ad alcuni determinanti aritmetici* (Comptes-Rendus des Lincei). *Intorno ad una classe di funzioni aritmetiche* (Journal de Battaglini). *Considérations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion* (Annales de l'École normale supérieure). *Nuovo studio di determinanti aritmetici* (Comptes-Rendus des Lincei) (*).

Note. Au fond, le théorème rappelé ici est un corollaire de celui qui a été publié en 1876 dans les *Proceedings* de la Société mathématique de

(*) Plusieurs des articles de M. Cesáro cités plus haut sont actuellement en cours de publication et, à cause de cela, nous n'avons pu indiquer exactement le volume et la page des Recueils où ils paraîtront prochainement.

Digitized by Google

Londres, t. VII, p. 108-112, par l'éminent arithméticien d'Oxford H. J. S. SMITH, dont la science déplore encore la perte. Nous avons donné une démonstration du théorème dont s'occupe M. Cesáro, au fond identique à la sienne, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 1878, 2e série, t. XLVI, n° 12. L'idée d'employer la multiplication des déterminants dans cette démonstration a été empruntée par nous aux *Examination Papers* de Cambridge, et nous aurions dû le dire dans la note des Bulletins. Nous réparons ici cette omission. (P. M.)

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE(*).

1. Soit, dans un triangle ABC, CF la bissectrice intérieure, rencontrant, en D, la circonférence circonscrite. Soit CG la bissectrice extérieure, rencontrant, en E, la même circonférence. Soient A′, B′, D′, F′ les symétriques de A, B, D, F, relativement à CG. Soient A″, B″, E″, G″ les symétriques de A, B, E, G, relativement à CD. Les quatorze quadrilatères :

DA′F′B, DAF′B′, FA′BD′, FAD′B′, EA″G″B, EAG″B″, E″A″GB, E″AGB″, DEF′G, D′EFG, DE″F′G″, D′E″FG″, DF′EG, DFE″G

sont inscriptibles. Si l'on opère de même sur les angles A, B, on aura donc *quarante-deux* quadrilatères inscriptibles, déduits du triangle ABC. (E. CATALAN.)

2. On donne un quadrilatère inscrit ABCD dont les diagonales sont rectangulaires et se coupent au point H. Démontrer : 1° que les projections du point H sur les côtés et les points milieux de ces côtés sont sur une même circonférence; 2° que les projections du point H sur les côtés sont les sommets d'un quadrilatère circonscriptible; 3° trouver le lieu géométrique décrit par le point milieu de l'un des côtés, quand le point H se meut sur l'une des diagonales, et le lieu de la projection du point H sur ce côté; 4° trouver le lieu des points milieux et des projections quand on fait tourner le système des diagonales autour du point H; 5° démon-

---

(*) Nous réunissons ici les énoncés d'un grand nombre de propositions nouvelles trouvées par nos collaborateurs. Lorsque la démonstration offre quelque difficulté, nous l'indiquons très sommairement.

Digitized by Google

trer que les centres des cercles des neuf points des triangles ABC, ADC, BCD, BAD sont les sommets d'un quadrilatère semblable au quadrilatère ABCD ; 6° si l'on considère la ligne qui joint les points de concours des côtés opposés de ABCD, trouver le lieu décrit par le point d'intersection de cette ligne avec HO, quand le point H décrit l'une des diagonales. (G. BOUBALS.)

La figure qui fait l'objet de cette question a été étudiée par plusieurs géomètres. Voir *Nouvelles Annales*, 1871, p. 487 (SANCERY) ; BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, Livre II, Chap. III. (J. N.)

3. Dans tout triangle rectiligne

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} C'}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C},$$

C' étant l'angle que fait la bissectrice de l'angle C avec la base AB.

(E. CATALAN.)

4. Soit H le point de concours des hauteurs AA', BB', CC' du triangle ABC ; démontrer que

$$\sqrt{ABC.ABH.BCH.CAH} = R^2.A'B'C'. \quad \text{(FR. FALISSE.)}$$

On part des relations : $ABH = 2R^2 \cos A \cos B \sin C$, etc.

5. De chaque sommet d'un triangle ABC comme centre, avec la hauteur correspondante pour rayon, l'on décrit une circonférence. Les tangentes à l'un de ces cercles, menées par les deux autres sommets se coupent, respectivement, en trois points A', B', C'. Démontrer que les droites AA', BB', CC' se rencontrent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

COROLLAIRE. Les tangentes menées des extrémités de l'hypoténuse d'un triangle rectangle au cercle ayant pour centre le sommet de l'angle droit et pour rayon la hauteur correspondante sont parallèles à la médiane issue du même sommet. (H. BROCARD.)

Cette proposition a déjà été énoncée, sous une autre forme, par M. Catalan, qui a appelé les triangles A'BC, B'CA, C'AB les *annexes* de ABC (Voir *Mathesis*, t. III, p. 61).

6. On donne une circonférence et deux diamètres rectangulaires AOA', BOB'. On prolonge BA d'une longueur AC = AB, et l'on trace le diamètre CO qui rencontre l'arc BA' en D, l'arc AB' en E. Démontrer que CE représente le double du côté du décagone régulier inscrit et CD le double du côté du décagone étoilé. (Communiqué par M. BROCARD.)

Digitized by Google

7. Dans un cercle O, on trace un diamètre AB et un rayon quelconque OC. Soient r_1, r_2 les rayons des cercles inscrits aux secteurs AOC, BOC, et soit r_3 le rayon du cercle touchant le diamètre AB, et le cercle O en C. On a les relations

$$\left(\frac{r_1}{R-r_1}\right)^2+\left(\frac{r_2}{R-r_2}\right)^2=1, \quad \frac{2r_1r_2}{r_3}=\frac{(R-r_1)(R-r_2)}{R-r_3}.$$

Question analogue pour la Géométrie sphérique. (J. DEPREZ.)

Les centres des cercles r_1, r_2 décrivent une même parabole, et la ligne de ces centres enveloppe également une parabole. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Les réglettes multiplicatrices, appareils à calculs exacts et instantanés pour simplifier la multiplication et la division, inventés par H. GENAILLE, ingénieur aux chemins de fer de l'État à Tours, et perfectionnés par ED. LUCAS, professeur de mathématiques spéciales au lycée S. Louis. Paris, E. Belin, 1885. Onze réglettes dans une boîte en carton. Prix : 1 franc.

Tables de multiplication extrêmement ingénieuses contenant les produits de tous les nombres de dix chiffres au plus, par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ces produits sont écrits au moyen de 2012 chiffres seulement. En se servant de deux ou de plusieurs boîtes, on peut même avoir les produits des nombres de plus de dix chiffres.

Les mêmes auteurs ont publié trois autres tables analogues : 1° *Les réglettes multisectrices*, donnant les quotients et restes des divisions des nombres de dix chiffres au plus, par un nombre d'un seul chiffre. 2° *Les réglettes financières*, servant à faire les calculs d'intérêt. 3° *Les réglettes népériennes*, équivalentes aux bâtons de la Rhabdologie de Néper. On leur doit aussi *un calendrier perpétuel* (Julien ou Grégorien) *à roulettes*, pour plus de quarante siècles.

Tablas de logarithmos, cologarithmos y antilogarithmos de los números naturales y trigonométricos, con los logarithmos de Gauss y de Mendoza, por el Doctor D. LUIS GONZAGA GASCO, cathedrático de Mathemáticas por oposición. Primera Parte. Valencia. Imprenta de Nicasio Rius, 1884. Un volume in-18 de XVI-87 pages in-12 avec six tables, chacune d'une double page.

Les tables sont à quatre décimales(*). La première partie ne contient que des logarithmes de nombres naturels.

(*) Des tables à quatre décimales, ou tout au plus à cinq, comme l'ont remarqué Bremiker et M. Hoüel, sont les seules qu'il soit utile d'introduire dans les collèges, les seules aussi qui soient vraiment pratiques, dans la vie usuelle, sauf pour les calculs d'intérêts qui exigent souvent, pour les nombres voisins de l'unité, des tables à 8 décimales au moins.

Digitized by Google

Table I. Table des logarithmes des nombres de 1 à 1000, avec des tables de parties proportionnelles si habilement disposées qu'on en déduit immédiatement les logarithmes à cinq décimales des nombres de 1 à 10000. II. Cologarithmes. III. Antilogarithmes. IV-V. Logarithmes d'addition et de soustraction de Gauss, ou plutôt de Leonelli. VI. Table d'interpolation (sur une feuille mobile) donnant les produits des nombres de 1 à 100 par les neuf premiers nombres.

Quand un chiffre a été forcé dans les tables, il est marqué en caractère fort. Dans les calculs, si l'on veut obtenir l'approximation la plus grande possible, tout dernier chiffre non forcé peut être augmenté, tout dernier chiffre forcé peut être diminué d'un quart d'unité, comme le fait remarquer l'auteur.

L'introduction très longue (trop longue peut-être) qui précède les tables contient tous les renseignements nécessaires sur la disposition et l'usage de celles-ci.

Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle géométrie, par H. HANKEL. Traduction de M. DEWULF, colonel du génie. Paris, Gauthier-Villars, 1885. Une brochure in-8° de 36 pages.

Cette étude historique, qui sert d'introduction au *Traité élémentaire de Géométrie projective* de Hankel, expose, d'une façon magistrale, le caractère général de la nouvelle géométrie, et les tendances particulières des travaux des créateurs ou promoteurs de cette science : Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Plücker, von Staudt et de leurs précurseurs, Monge, Carnot, Dupin, Bobillier.

Quelques notes intéressantes, dues au savant traducteur, complétent ou rectifient, sur quelques points secondaires, le texte original.

Trattato di Algebra elementare, con numerosi esempi e con una copiosa raccolta di esercizi. Libro di testo per le scuole secundarie superiori proposto da GIOVANNI GARBIERI, Professore nell' Universita di Padova. Volume I. Padova, F. Sacchetto, 1886. Un vol. in 12 de VII-504 pages. Prix : fr. 3,50.

Sommaire. I. Les nombres rationnels. 1. Calcul algébrique (1-105). 2. Équations du premier degré (106-222). II. Les nombres irrationnels. 1. Opérations avec les nombres irrationnels (223-331). 2. Équations du second degré (332-415). 3. Logarithmes et progressions (416-504). Chaque paragraphe est suivi d'exercices nombreux.

Les questions difficiles relatives aux nombres incommensurables semblent traitées avec soin dans cet ouvrage.

Cours de Géométrie analytique par J. CARNOY, Professeur à l'Université de Louvain, etc. Géométrie plane. Quatrième édition, revue et augmentée. Louvain, Peeters ; Paris, Gauthier-Villars ; 1886. Un vol. in-8° de LIII-456 pages. Prix : 9 fr. en Belgique, 10 fr. en France.

Sommaire. Préliminaires (Principe des signes ; déterminants ; résultants ; invariants) (XI-LIII). 1. Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires (3-23). 2-3. Droite en coordonnées cartésiennes (24-68) ; trilinéaires, tangentielles (69-118).

Digitized by Google

4. Cercle en coordonnées cartésiennes, trilinéaires ou tangentielles (119-150). 5. Systèmes de cercles (151-167). 6-7. Coniques en coordonnées cartésiennes (168-211); trilinéaires et tangentielles (212-233). 8. Propriétés de l'ellipse (234-264); de l'hyperbole (264-285); de la parabole (286-300). 9. Exercices sur les coniques rapportées à des coordonnées cartésiennes, trilinéaires ou tangentielles (301-324). 10-12. Propriétés générales des coniques : notations abrégées (325-350); coordonnées trilinéaires ou polylinéaires (351-366); méthode des identités (367-379). 13. Transformation des figures : polaires réciproques, homographie, homologie; inversion (380-399). 14. Courbes algébriques d'ordre m : centre, diamètre, tangente, polaires, asymptotes; singularités ordinaires, formules de Plücker; théorèmes généraux, faisceaux, réseaux. Courbes unicursales; transformations birationnelles. Beaucoup d'exercices.

Ce cours a le mérite particulier d'initier rapidement le lecteur aux derniers progrès de la science, et de donner un aperçu sommaire des méthodes ou des questions nouvelles, du moins autant que le permettent les limites d'un manuel. On remarquera que, dès la théorie de la ligne droite, l'auteur introduit systématiquement les coordonnées trilinéaires et tangentielles, concurremment avec les coordonnées cartésiennes.

A. Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Cercle, and Conic Sections, containing an Account of its most recent Extensions, with numerous Examples, by John Casey, LL. D., F. R. S., Professor of the Higher Mathematics and Mathematical Physics in the Catholic University of Ireland, etc., etc. Dublin : Hodges, Figgis, and Co.; London : Longmans, Green, and Co.; 1885. Un volume petit in-8°, cartonné à l'anglaise, de XVI-331 pages (106 figures dans le texte). Prix : 7 sh. 6 d.

Sommaire. I. Le Point. Coordonnées cartésiennes; coordonnées polaires; interprétation géométrique des imaginaires. II. La ligne droite, coordonnées cartésiennes, trilinéaires, tangentielles. III. Le cercle : coordonnées cartésiennes; systèmes de cercles tangents; coordonnées trilinéaires; coordonnées tangentielles. IV. Équation générale des coniques en coordonnées cartésiennes. V. La parabole. VI. L'ellipse. VII. L'hyperbole. VIII. Recherches diverses (près de cent pages). 1. Contact des sections coniques. 2. Figures semblables. 3. Equation générale des coniques en coordonnées trilinéaires. 4. Enveloppes. 5. Propriétés projectives. 6. Sections du cône. 7. Divisions homographiques. 8. Polaires réciproques. 9. Invariants et covariants.

Pour donner une idée de ce qui distingue le livre de M. Casey des ouvrages semblables, nous résumons la préface : L'auteur a essayé de faire un exposé rapide, mais assez complet de la géométrie analytique des coniques en y faisant entrer les découvertes les plus récentes relatives à ces courbes.

Quelques-unes des recherches résumées dans ce manuel sont dues à M. Casey lui-même. C'est lui qui a trouvé l'équation d'une circonférence ou d'une conique tangente à trois autres, et qui a étendu les équations des cercles inscrits ou circonscrits à un triangle aux cercles inscrits ou circonscrits à un polygone. On lui

Digitized by Google

doit aussi l'extension aux coniques des propriétés des cercles orthogonaux et la démonstration du théorème que le tact-invariant de deux coniques est le produit de six rapports anharmoniques, etc. Dans les questions plus anciennes ou plus élémentaires, il y a souvent aussi des preuves qui sont, à la fois, simples et originales.

Les exercices sont très nombreux (plus de mille). Ceux qui sont placés après les propositions sont, pour la plupart, élémentaires et sont des applications des théorèmes qui précèdent. Les exercices de la fin des chapitres sont plus difficiles. Les uns sont originaux; d'autres sont empruntés aux *Examination Papers* des Universités, aux *Exemples on Analytical Geometry* de Roberts, aux *Mathematical Problems* de Wolstenholme. L'auteur en doit aussi un grand nombre à ses amis mathématiques, les professeurs Neuberg, R. Curtis, S. J., Crofton et à MM. J. et F. Purser.

Parmi les ouvrages consultés, M. Casey signale surtout ceux de Salmon, Chasles et Clebsch, et pour la géométrie récente, les écrits de MM. Brocard, Neuberg, Lemoine, M'Cay et Tucker. C'est assez dire que la *Mathesis* a été souvent mise à contribution dans le nouveau et intéressant manuel dû savant professeur de l'Université catholique de Dublin(*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

Question 217.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 47)

Intégrer l'équation

$$(a^2y^2 + a^2c^2 - c^2x^2)\,dy^2 + 2a^2xy\,dx\,dy + (a^2 - c^2)\,x^2dx^2 = 0.$$

(E. Catalan.)

Solution par M. Bastin. L'équation peut être écrite ainsi;

$$(a^2y^2 + a^2c^2 - c^2x^2)\,p^2 + 2a^2xyp + (a^2 - c^2)\,x^2 = 0. \qquad (1)$$

Sa dérivée est

$$(a^2y^2 + a^2c^2 - c^2x^2)\,p\frac{dp}{dx} + p^2(a^2py - c^2x)$$
$$+ a^2\left(py + p^2x + xy\frac{dp}{dx}\right) + (a^2 - c^2)\,x = 0. \qquad (2)$$

(*) Comme *A Sequel to Euclid*, la Géométrie analytique de M. J. Casey (*A Sequel to Apollonius*, comme l'appelle M. Brocard) sort des presses de l'autre Université de Dublin (Voir *Mathesis*, V, 76).

(**) Nous avons oublié de dire, dans le n° précédent, que la question 448 a été résolue aussi par M. Falisse.

Digitized by Google

Éliminons entre (1) et (2) la quantité $a^2y^2 + a^2c^2 - c^2x^2$; l'équation résultante se décompose aisément en facteurs :

$$[x\frac{dp}{dx} - p(1+p^2)]\,[(a^2-c^2)x + a^2py] = 0. \qquad (3)$$

Si l'on égale le premier facteur à zéro, on aura

$$\frac{dp}{p(1+p^2)} \text{ ou } \frac{dp}{p} - \frac{pdp}{1+p^2} = \frac{dx}{x},$$

d'où

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{x}{k}, \quad p = \frac{x}{\pm\sqrt{k^2-x^2}}. \qquad (4)$$

k étant la constante. L'élimination de p entre (1) et (4) donne l'intégrale

$$y = \mp\sqrt{k^2-x^2} \pm \frac{c}{a}\sqrt{k^2-a^2}. \qquad (5)$$

Le second facteur de (3) étant égalé à zéro, on a

$$p = -\frac{(a^2-c^2)x}{a^2y};$$

cette valeur étant substituée dans (1), on trouve

$$a^2y^2 + (a^2-c^2)x^2 - a^2(a^2-c^2) = 0. \qquad (6)$$

L'équation (1) est donc intégrée par les équations (5) et (6), dont l'une est l'intégrale générale, et l'autre une solution singulière.

Solution par M. Radicke. L'équation donnée peut s'écrire

$$a^2(ydy + xdx)^2 - c^2(x^2-a^2)dy^2 - c^2x^2dx^2 = 0.$$

Posant

$$y^2 + x^2 - a^2 = z^2, \quad ydy + xdx = zdz,$$

on obtient

$$a^2z^2dz^2 - c^2(z^2-y^2)dy^2 - c^2(zdz - ydy)^2 = 0,$$

ou bien

$$(a^2y^2 - c^2z^2 + c^2y^2)dz^2 - c^2(zdy - ydz)^2 = 0.$$

Soit encore

$$\frac{y}{z} = v, \quad \frac{zdy - ydz}{z^2} = dv;$$

d'où

$$\frac{dz^2}{z^2} = \frac{c^2dv^2}{a^2 - c^2 + c^2v^2}.$$

Digitized by Google

Extrayons la racine carrée des deux membres et intégrons; nous aurons

$$z = k\,(cv \pm \sqrt{a^2 - c^2 + c^2v^2}),$$

ou, sous forme rationnelle,

$$z^2 - 2kcvz - k^2\,(a^2 - c^2) = 0.$$

Remplaçons vz par y, z^2 par $x^2 + y^2 - a^2$; l'intégrale cherchée sera

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2kcy - k^2(a^2 - c^2) = 0,$$

ou

$$x^2 + (y - kc)^2 = a^2(1 + k^2).$$

L'équation différentielle de M. Catalan représente donc tous les cercles qui ont pour centre un point quelconque M de l'axe des y et dont le rayon résulte de la construction suivante : Prenons sur l'axe des x les distances $OA = a$, $OC = c$, tirons la droite MC qui rencontre en B la perpendiculaire élevée en A sur OA; MB sera le rayon du cercle.

Note. L'enveloppe des cercles trouvés par M. Radicke est l'ellipse représentée par

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

L'équation différentielle est donc intégrée par les cercles doublement tangents à cette ellipse, le centre étant situé sur l'axe des y. Ces cercles sont les podaires obliques des foyers de l'ellipse. (Poncelet.)

L'ellipse elle-même est une solution singulière de l'équation. En écrivant l'équation proposée sous la forme

$$[a^2y^2 + c^2\,(a^2 - x^2)]\,dy^2 + 2a^2ydy\,(xdx) + (a^2 - c^2)\,(xdx)^2 = 0,$$

on est amené à faire $a^2 - x^2 = u^2$, $xdx = -udu$, ce qui conduit à une équation homogène en y et u, puis, d'après une règle connue, on pose $u = yz$.

Voir encore, E. Catalan, N. C. M., 1876, II, p. 75-82.

×Question 379.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 216.)

Soient A′, B′, C′ *les points de contact des côtés du triangle* ABC *avec le cercle inscrit, et* r, ρ, ρ', ρ'' *les rayons des cercles inscrits aux triangles* ABC, AB′C′, BC′A′, CA′B′. *Démontrer la relation*

(A) $$r\,(2r - \rho - \rho' - \rho'')^2 = 2\rho\rho'\rho''.$$ (J. Neuberg.)

Solution par MM. Servais, Colette *et* Piette. Soient I, E, E′, E″

Digitized by Google

les centres des quatre cercles. Il est facile de voir que la droite IA, perpendiculaire au milieu M de B'C', rencontre la circonférence I au milieu E de l'arc C'B'. Par conséquent, si A', B', C' désignent les angles du triangle A'B'C', on a

$$\rho = EM = EI - IM = r(1 - \cos A') = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2} A'.$$

Donc

$$\sin \tfrac{1}{2} A' = \sqrt{\frac{\rho}{2r}}, \quad \sin \tfrac{1}{2} B' = \sqrt{\frac{\rho'}{2r}}, \quad \sin \tfrac{1}{2} C' = \sqrt{\frac{\rho''}{2r}}. \quad (1)$$

Mais de l'égalité

$$\tfrac{1}{2} A' + \tfrac{1}{2} B' + \tfrac{1}{2} C' = 90°,$$

on tire

$$\sin \tfrac{1}{2} A' = \cos(\tfrac{1}{2} B' + \tfrac{1}{2} C') = \sqrt{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} B'} \sqrt{1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} C'} - \sin \tfrac{1}{2} B' \sin \tfrac{1}{2} C',$$

ou

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A' + \sin^2 \tfrac{1}{2} B' + \sin^2 \tfrac{1}{2} C' + 2 \sin \tfrac{1}{2} A' \sin \tfrac{1}{2} B' \sin \tfrac{1}{2} C' = 1. \quad (2)$$

En substituant dans cette formule les valeurs (1), on trouve la relation proposée.

Solutions analogues par MM. Gob, Mineur, Deprez, Verniory, Cl. Thiry, Meurisse, Lambert et Farisano.

Remarque I (due à M. Farisano). Si ρ, ρ', ρ'' sont les rayons des cercles exinscrits aux triangles AB'C', BC'A', CA'B' et touchant *intérieurement* les côtés B'C', C'A', A'B', on a l'égalité

$$r(2\rho\rho' + 2\rho'\rho'' + 2\rho''\rho - \rho^2 - \rho'^2 - \rho''^2) = 2\rho\rho'\rho'',$$

qui se déduit de l'identité

$$\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C' + 2 \cos A' \cos B' \cos C' = 1.... \quad (3)$$

Cette dernière relation s'applique aussi au cas où le cercle A'B'C' est remplacé par un cercle exinscrit à ABC, ρ, ρ', ρ'' étant les rayons des cercles inscrits à AB'C', BC'A', CA'B'.

Remarque II (due à M. Lambert). Soit α le rayon du cercle exinscrit à ABC et touchant les prolongements de AB et AC en B_1 et C_1, et soient α_1 le rayon du cercle inscrit au triangle isoscèle AB_1C_1, α_2 celui du cercle exinscrit au même triangle qui touche B_1C_1 en son milieu. On trouve aisément

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) = 2\alpha \sin^2 \frac{A'}{2},$$

$$\alpha_2 = \alpha\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) = 2\alpha \cos^2 \frac{A'}{2},$$

Digitized by Google

A′ étant le complément de $\frac{A}{2}$. Adoptant des notations analogues aux sommets B et C, et remarquant que $\frac{1}{2}A' + \frac{1}{2}B' + \frac{1}{2}C' = \frac{1}{2}\pi$, on trouve au moyen des identités (2) et (3),

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\beta_1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\alpha\beta\gamma}} = 2,$$

$$2\Sigma\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha\beta} - \Sigma\frac{\alpha_2^2}{\alpha^2} = 2\frac{\alpha_2\beta_2\gamma_2}{\alpha\beta\gamma}.$$

Remarque III. Considérons le triangle A′B′C′ comme étant le triangle primitif. Soient R, r, α, β, γ les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits; ρ, ρ', ρ'' sont les flèches des arcs interceptés par les angles A′, B′, C′. D'après un théorème connu, on a

$$\rho + \rho' + \rho'' = 2R - r,$$

ce qui, combiné avec (A), donne $R^2r = 2\rho\rho'\rho''$, ou

$$4R^2r = (\alpha - r)(\beta - r)(\gamma - r).$$

La formule de M. Farisano équivaut à

$$4R = \frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}.$$

Ces résultats peuvent être vérifiés directement. (J. N.)

M. Pisani nous a envoyé aussi une bonne solution de la question 379.

Question 393.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 247.)

Trouver toutes les racines de l'équation

$$(x-a-1)(x-a-2)\dots(x-a-n)$$
$$+\frac{n}{1}a(x-a-1)(x-a-2)\dots(x-a-n+1)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)(x-a-1)(x-a-2)\dots(x-a-n+2)$$
$$+\dots+a(a-1)\dots(a-n+1)=0 \quad \text{(E. Catalan.)}$$

Solution par M. E. Cesáro. Les coefficients de $\frac{z^n}{1.2\dots n}$ dans les développements de $(1+z)^{x-a-1}$, $(1+z)^a$ sont respectivement

$(x-a-1)(x-a-2)\dots(x-a-n)$, $a(a-1)\dots(a-n+1)$.

Digitized by Google

Par suite, le premier membre de l'équation proposée représente le coefficient de $\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}$ dans le produit des deux fonctions, qui est $(1+z)^{x-1}$. Il est donc identique avec $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. Conséquemment, les racines cherchées sont $1, 2, 3, \ldots, n$.

M. Heyne a résolu la même question en ordonnant le premier membre par rapport à x.

La solution de M. Cesáro dépend de l'identité connue (*)

$$\sum_0^n C_{x-a,\,i} \times C_{a,\,n-i} = C_{x,\,n},$$

qu'on peut démontrer directement : pour former toutes les combinaisons, n à n, de x lettres dont $x-a$ lettres françaises et a lettres grecques, on réunit i quelconques des premières lettres à $n-i$ quelconques des autres, etc.

Question 404.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 22.)

On donne un angle droit YOX, *et un cercle dont le centre* C *est sur la bissectrice de l'angle* YOX. *D'un point quelconque* A *de la circonférence, on mène une perpendiculaire sur* OX; *soit* A′ *le point où cette droite rencontre la droite symétrique de* OA *par rapport à* OC. *Chercher le lieu de* A′.

(De Rocquigny.)

Solution par MM. Falisse, Farisano, Gob et Pisani. Soient

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2$$

l'équation du cercle, et (α, β) les coordonnées de A. Les équations des droites OA, OA′ étant

$$x = \alpha, \quad y = \frac{\alpha}{\beta}x,$$

les coordonnées de A en fonction de celles de A′ seront

$$\alpha = x, \quad \beta = \frac{x^2}{y}.$$

En exprimant qu'elles vérifient l'équation du cercle, on aura l'équation du lieu (A′), savoir :

$$x^2(x^2+y^2) - 2axy(x+y) + y^2(2a^2 - R^2) = 0$$

ou

$$\rho^2\cos^2\omega - 2a\rho(\cos\omega + \sin\omega) + \sin^2\omega\,(2a^2 - R^2) = 0 (**).$$

(*) Voir, par exemple, Catalan, *Cours d'Analyse*, p. 55, 2e édition.

(**) Nous engageons beaucoup nos lecteurs à étudier les singularités de cette

Digitized by Google

×Question 451.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 167.)

On donne trois points en ligne droite A, B, C. *Trouver géométriquement le lieu du point d'intersection de deux cercles égaux décrits respectivement sur* AB, BC. (Gob.)

Solution par MM. Henrard, Farisano, Boedt. Soit D un point du lieu. Les angles DAB, DCB ayant pour mesure des arcs égaux, le lieu de D est la perpendiculaire au milieu de AC.

Solution par MM. Deprez, Fairon, Keelhof, Cl. Thiry, Verniory, Collin et Gillet. Soient O, O′ les centres des deux cercles, D leur point d'intersection, I le centre du losange BODO′. Les points O, O′ décrivent deux parallèles, le point I la parallèle équidistante des deux premières, et le point D une parallèle dont la distance à B est double de celle du lieu de I à B.

Solution analytique par M. Verniory. Prenons pour axes de coordonnées AB et une perpendiculaire par B, et soient $(2a, 0)$, $(2b, 0)$ les coordonnées de A et B. Les cercles variables ont pour équations

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2cy = 0, \quad x^2 + y^2 - 2bx - 2dy = 0,$$

sous la condition $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, ou $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$. L'élimination de c et d entre les trois égalités donne

$$(x^2 + y^2)(x - a - b) = 0.$$

Remarques (dues à M. Gob). 1° Le milieu I de la ligne OO′ des centres parcourt une perpendiculaire à AC et l'angle BIO est droit; donc la droite OO′ enveloppe une parabole ayant pour foyer B et pour directrice le lieu de D.

2° Soit E le point de rencontre des tangentes menées par A et C

---

courbe en la construisant par points d'après sa définition géométrique. On considèrera différents cas suivant que les axes passent par le centre du cercle ($\rho = R \operatorname{tg} \omega$), se croisent à l'intérieur ou sur le cercle (le lieu se décompose alors), sont tangents au cercle (le lieu admet une asymptote osculatrice) ou ne le rencontrent pas (courbe fermée).

Les points A et A′ satisfont à une transformation biquadratique réversible, définie par les formules suivantes en coordonnées cartésiennes homogènes :

$$\alpha : \beta : \gamma = xy : x^2 : yz,$$
$$x : y : z = \alpha\beta : \alpha^2 : \beta\gamma.$$ (J. N.)

Digitized by Google

respectivement aux cercles O et O'. Si A' et C' sont les milieux de BA et BC, on a

$$\frac{AA'}{CC'} = \frac{AO \cos A'AO}{CO' \cos C'CO'} = \frac{\sin EAA'}{\sin ECC'} = \frac{EC}{EA};$$

donc le rapport EC : EA étant constant, le point E décrit une circonférence (*).

M. H. MANDART (athénée de Mons) a résolu la même question. M. D'HONDT observe que la projection de OD sur ABC étant égale à celle de BO', le point D décrit une perpendieulaire à ABC.

×Question 453.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 167.)

Par le point d'intersection A *de deux circonférences* O, O' *on mène deux sécantes quelconques* ABC, AB'C' *qui rencontrent les deux courbes en* B, C, B', C'. *Démontrer que les circonférences* ABC', AB'C *se coupent sur une circonférence fixe*(**).

Solution par les figures inverses, par M. GOB. Si l'on prend le point A pour centre d'inversion, les circonférences O, O' se transforment en deux droites D, D', qui sont rencontrées par les sécantes BC, B'C' aux points β, γ, β', γ', inverses de B, C, B', C'. On sait que les droites $\beta\gamma'$, $\beta'\gamma$ se coupent sur la polaire harmonique D'' de A par rapport à l'angle (D, D'). Par conséquent, leurs inverses, ou les circonférences ABC', AB'C se coupent sur l'inverse de la droite D''.

Solution directe par MM. DEPREZ, FAIRON, HENRARD, RENSON, COLLIN, D'HONDT *et* VERNIORY. Les centres I, I' se trouvent à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux des cordes AB et AC', AB' et AC. Ces perpendiculaires forment évidemment un parallélogramme dont OO' et II' sont les diagonales. La ligne des centres des cercles ABC', AB'C pivote donc autour du milieu O'' de OO', et comme elle est perpendiculaire au milieu de la corde commune AA', on a O''A = O''A'; donc A' décrit une circonférence dont le centre est O'' et le rayon O''A.

(*) Les rayons OD et O'D enveloppent des coniques. Car si h est la distance de D au milieu M de AC, la relation $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$ donne $a^2 - b^2 = h(h - 2c) = h(2d - h)$. Or, $h - 2c$ est le segment intercepté sur la droite symétrique de DM par rapport OA', entre AC et OD, etc. (J. N.)

(**) L'énoncé portait la restriction inutile que les deux circonférences se touchent en A. (GOB.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**483.** Soient O, I, I′ les centres du cercle circonscrit à un triangle ABC, du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit qui touche BC intérieurement; démontrer que

$$\operatorname{tg} \mathrm{IOI}' = \pm \frac{2(\sin \mathrm{B} - \sin \mathrm{C})}{2\cos \mathrm{A} - 1}. \qquad \text{(Leudesdorf.)}$$

×**484.** Démontrer que l'équation

$$m^2 \cos\alpha \cos\beta + m(\sin\alpha + \sin\beta) + 1 = 0$$

détermine deux valeurs α', α'' de l'angle α satisfaisant à l'égalité

$$m^2 \cos\alpha' \cos\alpha'' + m(\sin\alpha' + \sin\alpha'') + 1 = 0.$$

(D'après Wright.)

×**485.** Tout plan parallèle à une face d'un octaèdre régulier coupe la surface de ce solide suivant un hexagone de périmètre constant.

(Mc. Alister.)

×**486.** La somme des carrés des tangentes des angles sous lesquels on voit, d'un point quelconque d'une circonférence, les diamètres qui passent par les sommets opposés d'un polygone régulier circonscrit d'un nombre pair de côtés est constante et égale à

$$\frac{2nk^2}{(k^2-1)^2}$$

$2n$ étant le nombre des côtés du polygone et k le rapport du rayon à l'apothème. (E. Gelin.)

×**487.** Soient AH la hauteur du triangle ABC, M le milieu de BC, B′ et C′ les projections de B et C sur la bissectrice de l'angle BAC, A′ le point de concours des perpendiculaires abaissées de B′ sur AC et de C′ sur AB. On sait que A′ est sur la hauteur AH et que les cinq points B′, M, C′, A′, H sont sur une même circonférence. Cela posé : 1° calculer les longueurs A′M, A′H, A′B′ en fonction des éléments du triangle ABC; 2° démontrer que, BC et l'angle A restant constants, le point A′, le point de concours des hauteurs et le centre du cercle des neuf points du triangle A′B′C′ décrivent des circonférences. (Deprez.)

488. D'un point, pris sur une strophoïde droite, on mène les deux tangentes à la courbe, autres que celle du point considéré. Démontrer

Digitized by Google

que la corde des contacts enveloppe une parabole ayant même axe et même sommet que la strophoïde et son foyer symétrique du point double par rapport à ce sommet. (E. FAUQUEMBERGUE.)

×**489.** On donne, dans un plan, deux polygones homothétiques. Soient $a, b, c.....$ les côtes de l'un d'eux et $x, y, z.....$ les distances des côtés homologues. Démontrer que la quantité $ax + by + cz + ...$ reste constante lorsque les deux polygones se déplacent(*). Théorème analogue pour deux polyèdres homothétiques (en remplaçant les côtés des polygones précédents par les faces des polyèdres).

(E. FAUQUEMBERGUE.)

490. D'un point P pris sur la tangente en C à un cercle, on mène une sécante PAB telle que la surface du triangle ABC soit maximum ; trouver l'enveloppe de cette sécante quand le point P se meut sur la tangente. (E. FAUQUEMBERGUE.)

491. Par le foyer d'une parabole, on mène trois rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux, et, en leurs milieux, on élève des perpendiculaires. Trouver le lieu du centre et l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle équilatéral ainsi formé (**). (E. FAUQUEMBERGUE.)

×QUESTIONS D'EXAMEN.

218. *Aire du triangle* (*Mathesis*, III, 136, 167, IV, 232) :

$$S = \frac{a-b}{\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}} = \frac{r^2(r'-r'')(r'-r''')(r''-r''')}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

(E. RENSON.)

219. Si N est impair, $N^{2^{n+1}} - N$ est divisible par 3.2^{n+2}. (VERNIORY.)

220. Calculer en fonction de l'arête d'un tétraèdre régulier : 1° le rayon de la sphère tangente aux six arêtes ; 2° la partie du volume de la sphère extérieure au tétraèdre ; 3° la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère.

221. Dans tout triangle rectangle ABC :

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C = \frac{2(a^2-bc)}{(a+b)(a+c)}. \qquad \text{(E. RENSON.)}$$

(*) Le cas de deux triangles homothétiques a été signalé par M. E. CESÀRO. (N. C. M., t. VI, p. 277).

(**) Rectification : Question 475, p. 238, au dénominateur, lisez $(1-\sqrt{2})^n$.

Digitized by Google

SUR LE QUADRILATÈRE HARMONIQUE;

par M. J. Neuberg.

(*Suite*, voir pages 202, 217, 241).

15. Les droites Aω et Aω′, Bω et Bω′ ..., étant également inclinées sur les bissectrices des angles A, B, ..., les points de Brocard sont les foyers d'une ellipse inscrite au quadrilatère harmonique (*ellipse de Brocard*).

Les projections de ω et ω′ sur les côtés de ABCD sont situées sur une même circonférence ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse de Brocard.

En général, si l'on projette un foyer F d'une ellipse sur les tangentes, les projetantes faisant, dans un même sens, un angle donné θ avec les tangentes, le lieu de ces projections est une circonférence doublement tangente à la conique et ayant son centre sur le petit axe (Poncelet). Pour abréger le discours, ce lieu peut être appelé la *podaire, d'indice* θ, *du point* F; il coïncide avec la podaire, d'indice $\pi - \theta$, de l'autre foyer F′.

D'après cela, la circonférence circonscrite au quadrilatère harmonique ABCD est la podaire, d'indice φ ou $\pi - \varphi$, des foyers de l'ellipse de Brocard. En vertu d'un théorème de Poncelet, il existe une infinité de quadrilatères circonscrits à cette ellipse et inscrits au cercle O. Tous ces quadrilatères sont harmoniques et ont même point de Lemoine E.

Faisons maintenant tourner le faisceau (ω, ABCD) d'un certain angle autour de ω, et le faisceau (ω′, BCDA) du même angle, mais en sens contraire, autour de ω′; les rayons de ces faisceaux rencontreront, respectivement, les côtés a, b, c, d du quadrilatère en huit points $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ appartenant à une même circonférence, podaire oblique des foyers de l'ellipse de Brocard. Les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont, évidemment, égaux entre eux et semblables à ABCD(*).

16. Les cercles que nous venons de rencontrer ont été appelés *cercles de Tucker* du quadrilatère ABCD. Leurs centres sont sur la droite EO, et ils ont pour enveloppe l'ellipse de Brocard.

(*) Les résultats des §§ 15, 16, 17 sont dus, en très grande partie, à MM. M^{c}Cay et Casey.

Digitized by Google

Les huit points concycliques $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'$ peuvent encore être considérés comme étant marqués sur les côtés de ABCD : 1° par les côtés d'un quadrilatère A'B'C'D' homothétique à ABCD par rapport au point de Lemoine E; 2° par les côtés d'un quadrilatère homothétique,

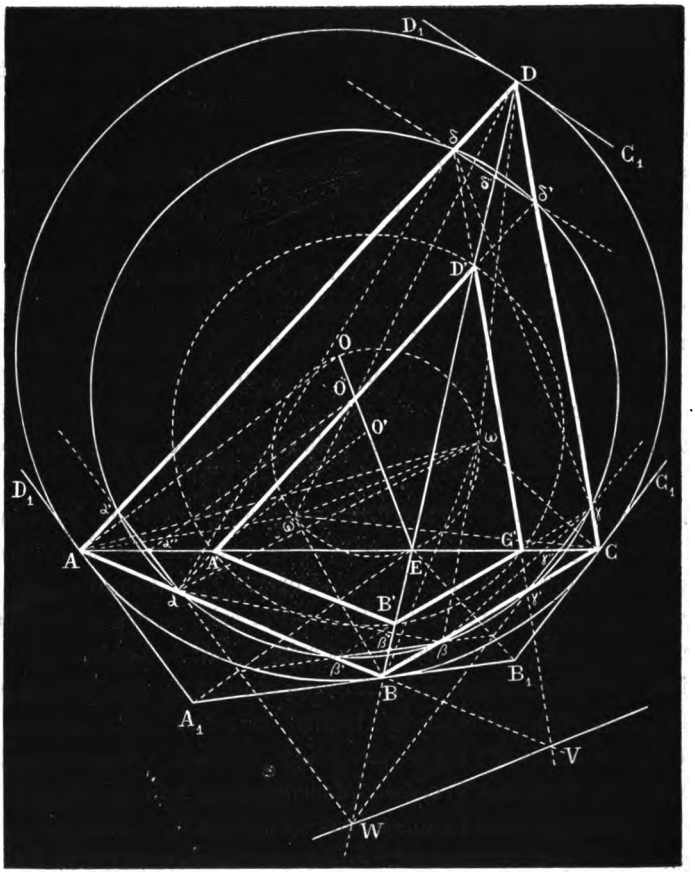


Fig. 3.

par rapport à E, au quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ qui est formé par les tangentes menées en A, B, C, D au cercle O(*) (fig. 3).

(*) Les différents modes de détermination des cercles de Tucker conduisent à ce résultat que les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ marquent sur a, b, c, d des divisions semblables dont A, B, C, D sont des points homologues et dont les segments homologues

Digitized by Google

Pour établir ces propositions, soient A'B'C'D' un quadrilatère homothétique à ABCD, par rapport à E; (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ') les intersections des côtés des angles A, B, C, D, avec ceux des angles A', B', C', D'; α'', β'', γ'', δ'' les centres des parallélogrammes $A\alpha A'\alpha'$, $B\beta B'\beta'$, $C\gamma C'\gamma'$, $D\delta D'\delta'$; O' le centre du cercle A'B'C'D', et O'' le milieu de OO'. La droite $\alpha\alpha'$ étant divisée en deux parties égales par la symédiane AE, est parallèle à la tangente AA_1; de même $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ sont parallèles aux tangentes A_1B, B_1C, C_1D. Mais le triangle A_1AB est isoscèle; par conséquent $\alpha\alpha'\beta\beta'$ est un trapèze isoscèle, et

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \delta\delta'.$$

Si l'on considère maintenant les trapèzes OO'A'A, OO'B'B,..., on observe que les droites $O''\alpha''$, $O''\beta''$,... parallèles à OA, OB,..., sont perpendiculaires à $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$,..., et égales à la demi-somme des rayons des cercles O, O'. De là résulte l'égalité des triangles isoscèles $O''\alpha\alpha'$, $O''\beta\beta'$,...; par conséquent, les huit points $\alpha\alpha'\beta\beta'$,..., sont sur un même cercle, ayant pour centre le milieu de OO'.

A cause des proportions

$$EA' : EA = EB' : EB = \text{etc.},$$

qui entraînent

$$E\alpha'' : EA = E\beta'' : EB = \text{etc.},$$

les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, suffisamment prolongées, déterminent un quadrilatère homothétique à $A_1B_1C_1D_1$, par rapport à E.

Enfin, si l'on fait tourner les deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ autour de O'' d'un angle égal $\alpha O\alpha''$, on les rend homothétiques à $\alpha''\beta''\gamma''\delta''$; donc ils sont égaux entre eux et semblables à ABCD. On voit ainsi que les cercles de Tucker admettent les deux autres modes de génération indiqués ci-dessus.

Les côtés de ABCD sont rencontrés par les côtés opposés de A'B'C'D' en quatre points situés sur une même droite; sur cette droite se coupent aussi les trois lignes $\alpha\alpha'$, $\gamma\gamma'$, BD, de même que $\beta\beta'$, $\delta\delta'$, AC. En effet, si V est le point de concours de AB et C'D', W celui de BD et $\gamma\gamma'$, on

---

sont proportionnels à $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$, $D\omega$. De plus les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ enveloppent, respectivement, quatre paraboles ayant pour foyer commun le point ω et touchant deux côtés consécutifs de ABCD.

Digitized by Google

trouve, au moyen des quadrilatères inscriptibles $AB\gamma'\delta$, $\alpha\beta'C'D'$, $BD\gamma\gamma'$:

$$VA \cdot VB = V\gamma' \cdot V\delta = V\alpha \cdot V\beta' = VC' \cdot VD',$$
$$WB \cdot WD = W\gamma \cdot W\gamma'.$$

Donc les points V et W, d'égale puissance par rapport aux trois cercles O, O', O'', appartiennent à l'axe radical de ces cercles, etc.

17. Il convient de signaler quelques cas particuliers remarquables des cercles de Tucker.

a) Le quadrilatère A'B'C'D' peut se réduire au point E, ce qui donne le théorème suivant : *Si par le point de Lemoine* E, *d'un quadrilatère harmonique* ABCD, *on mène des parallèles aux côtés, les huit points où ces parallèles rencontrent les côtés adjacents de* ABCD *sont sur un même cercle* (premier cercle de Lemoine), *dont le centre est au milieu de la droite joignant* E *au centre du cercle* ABCD. *Les points où l'une de ces parallèles rencontre le côté opposé de* ABCD *sont en ligne droite.*

Les huits points qui déterminent ce cercle sont également situés sur les côtés d'un quadrilatère symétrique de celui qui est formé par les tangentes en A, B, C, D au cercle ABCD, le centre de symétrie étant en E.

Enfin, les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ sont maintenant parallèles aux rayons du faisceau (ω, ABCD). En effet, si l'on mène EU perpendiculaire à DA, on a

$$A\alpha = \alpha'E = EU \operatorname{cosec} A = \tfrac{1}{2} d \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cosec} A, \quad A\omega = d \sin \varphi \operatorname{cosec} A ;$$

d'où

$$A\omega = 2A\alpha \cos \varphi = 2A\alpha \cos \omega AB ;$$

par suite, le triangle $A\alpha\omega$ est isoscèle, et

$$A\omega\alpha = \varphi = B\omega\beta = \cdots, \quad \omega\alpha B = 2\varphi = \omega\beta C = \cdots$$

Nous énoncerons ces résultats sous la forme suivante(*) : *Les points où les côtés a, b, c, d du quadrilatère harmonique sont rencontrés, respectivement, par les perpendiculaires aux milieux des droites* (ωA, $\omega\beta$, ωC, ωD) *et* (ω'B, ω'C, ω'D, ω'A) *appartiennent au premier cercle de Lemoine*, ou encore : *Le premier cercle de Lemoine est la podaire, d'indice* 2φ, *des foyers de l'ellipse de Brocard.* Comme les points α, β, γ, δ correspondent, dans le premier cercle de Lemoine, à une rotation du faisceau (ω, ABCD) tournant de l'angle φ, les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ font, avec leurs homolo-

(*) On peut énoncer un théorème analogue pour le triangle.

Digitized by Google

gues de ABCD, le même angle φ ; donc ils sont parallèles aux droites ωA, ωB, ... Par analogie, les côtés de $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont parallèles à $\omega' B$, $\omega' C$, ...

b) Le quadrilatère des droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ peut se réduire au point E. On a alors la proposition suivante : ***Etant donné un quadrilatère harmonique*** ABCD, ***si l'on mène par le point de Lemoine*** E ***des droites*** $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, ***parallèles aux tangentes menées en*** A, B, C, D ***au cercle circonscrit, et qu'on limite ces parallèles aux côtés des angles*** A, B, C, D, ***on obtient huit points d'un même cercle*** (deuxième cercle de Lemoine), ***dont le centre est en*** E.

Les points α, α', β, β', ... s'obtiennent encore par l'intersection des côtés du quadrilatère ABCD avec ceux du quadrilatère symétrique de ABCD par rapport à E ; on peut aussi les déterminer en faisant tourner les faisceaux (ω, ABCD), (ω', BCDA) de 90° autour de leurs sommets.

Les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ont leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABCD, et leur rapport de similitude par rapport à ABCD est égal à $\operatorname{tg}\varphi$.

Les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... sont, deux à deux, les diagonales de quatre rectangles inscrits aux triangles E'AD, E'BC, E''AB, E''CD. On conclut de là que, dans ces triangles, ***les droites joignant les milieux des hauteurs issues de*** E' ***ou*** E'' ***aux milieux des côtés correspondants passent par le point*** E.

c) Si nous faisons tourner les faisceaux (ω, ABCD), (ω', BCDA) de l'angle $\pi - 2\varphi$ autour de leurs sommets, le premier dans le sens ABC, le second dans le sens CBA, les rayons rencontrent les côtés du quadrilatère ABCD aux points d'une podaire, d'indice $\pi - \varphi$. Les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont maintenant égaux à ABCD ; ce qui est assez curieux.

Nous arrêtons ici notre étude. Il resterait encore à examiner les relations entre les points et les droites remarquables des quatre triangles ABC, BCD, CDA, DAB, de même que celles qui existent entre les trois quadrilatères harmoniques dérivés d'un même triangle. MM. Tucker et Casey ont déjà signalé quelques propriétés des points de Lemoine des premiers triangles.

Digitized by Google

CARACTÈRE GÉNÉRAL DE CONVERGENCE(*).

1. *Caractère général de convergence.* Lorsqu'une quantité variable passe par une série indéfinie de valeurs $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$, en tendant vers une limite finie s, on peut choisir n tel que les différences $s - s_n, s - s_{n+1}, s - s_{n+2}, \ldots, s - s_{n+p}$ soient, en valeur absolue, aussi petites qu'on le veut; par exemple, inférieures à $\frac{1}{2}\varepsilon$, quelque petit que soit ε. Il en résulte que les différences

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (s - s_n) - (s - s_{n+1}), \\ s_{n+2} - s_n &= (s - s_n) - (s - s_{n+2}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{n+p} - s_n &= (s - s_n) - (s - s_{n+p}), \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand, sont inférieures à ε pour toute valeur de p. Réciproquement, *si* $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$, etc., *sont les valeurs successives d'une quantité variable, telles que, pour toute quantité positive* ε *donnée d'avance, on puisse déterminer n de manière que l'on ait, en valeur absolue,*

$$s_{n+1} - s_n < \varepsilon, \quad s_{n+2} - s_n < \varepsilon, \quad s_{n+3} - s_n < \varepsilon,$$

et, en général, $s_{n+p} - s_n < \varepsilon$, QUEL QUE SOIT p, *la suite* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *tend vers une limite finie.* Ce théorème, dû à CAUCHY, est, avec celui dont il est la réciproque, une seconde forme du principe fondamental de la méthode des limites, auquel il est équivalent. Il est extrêmement utile, sinon dans les Éléments, au moins dans les parties élevées des Mathématiques, comme on peut le voir, par exemple, en lisant le mémoire d'Abel sur le Binôme.

A cause de l'importance de ce théorème, nous allons en donner une démonstration minutieuse, qui est le développement de celle que l'on trouve dans les ouvrages suivants : *Traité d'Algèbre*, par J. BERTRAND; deuxième partie, livre I, ch. I, n° 6 (Troisième édition, Paris, Hachette, 1863; p. 3); A. GENOCCHI, *Calcolo differenziale e Principii di Calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal* Dr G. PEANO; Calcolo differenziale,

---

(*) Cet article n'est pas destiné à nos jeunes lecteurs qui pourraient le trouver difficile à comprendre. D'ailleurs nous n'en faisons pas usage dans notre exposé de la *Méthode des limites*. Les articles antérieurs relatifs à cette méthode ont paru dans *Mathesis*, I, pp. 193-198, V, pp. 49-53, 193-196.

Digitized by Google

ch. I, n° 15, théorème VIII (Torino, Bocca, 1884; p. 8)(*), et dans plusieurs Traités d'Analyse infinitésimale.

2. *Préliminaires.* I. On peut exprimer l'hypothèse relative à ε, en disant que, pour une valeur de ε choisie d'avance, il y a une valeur de n, telle que

$$s_n - \varepsilon < s_{n+1},\ s_{n+2},\ s_{n+3},\ \ldots\ < s_n + \varepsilon.$$

II. Si l'on choisit successivement deux quantités positives ε, ε' et, si ε' est inférieur à ε, les valeurs n, n' correspondantes(**) seront telles que n' est égal ou supérieur à n. Car, si l'on avait $n' < n$, à cause de

$$s_{n'} - \varepsilon' < s_{n'+1},\ s_{n'+2},\ s_{n'+3},\ \ldots\ < s_{n'} + \varepsilon',$$

on aurait aussi, *à fortiori*,

$$s_{n'} - \varepsilon < s_{n'+1},\ s_{n'+2},\ s_{n'+3},\ \ldots\ < s_{n'} + \varepsilon.$$

Par suite, ce n'est pas n, mais une valeur plus petite n', ou une valeur moindre encore, qui correspondrait à ε.

3. Lemme I. *Aux quantités*

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_p$$

formant une suite indéfiniment décroissante telle que $\lim \varepsilon_p = 0$, *pour* $p = \infty$, *correspondent des nombres*

$$n,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_p,$$

formant une suite indéfiniment croissante. Car, supposons, s'il est possible, qu'à partir de ε_k, aux quantités ε_{k+1}, ε_{k+2}, ε_{k+3}, ... corresponde toujours le même nombre N. Alors, on aurait, quel que soit q,

$$s_N - \varepsilon_{k+q} < s_{N+1},\ s_{N+2},\ s_{N+3},\ \ldots\ < s_N + \varepsilon_{k+q}.$$

Par suite, en faisant croître q indéfiniment, puisque $\lim \varepsilon_{k+q} = 0$,

$$s_N = s_{N+1} = s_{N+2} = s_{N+3} = \text{etc.}$$

La quantité étudiée s_n ne serait donc plus variable à partir d'une certaine valeur N de la variable, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4. Lemme II. *Soient* $n' > n$ *et*

$$a < s_{n+1},\ s_{n+2},\ s_{n+3},\ \ldots\ < A \qquad (1)$$
$$b < s_{n'+1},\ s_{n'+2},\ s_{n'+3}\ \ldots\ < B \qquad (2)$$

(*) Voir *Mathesis*, IV, 224 et V, 11.

(**) On prend pour n et n' les valeurs les plus petites possible jouissant de la propriété indiquée.

Digitized by Google

Les quantités $s_{n'+1}$, $s_{n'+2}$, $s_{n'+3}$, etc., ***seront comprises entre la plus grande des quantités*** a, b ***et la plus petite des quantités*** A, B. En effet, puisque n' surpasse n, elles se trouvent parmi les quantités s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, etc., comprises entre a et A. Elles surpassent donc a à cause de (1), b à cause de (2), sont inférieures à A à cause de (1), à B à cause de (2); d'où le lemme.

5. ***Définition des suites*** (a), (A). I. Soient

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_p,$$

une suite de quantités indéfiniment décroissantes, de sorte que $\lim \varepsilon_p = 0$ pour $p = \infty$;

$$n,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_p,$$

les nombres correspondants, formant une suite indéfiniment croissante (n° 3);

$$s_n - \varepsilon,\ s_{n_1} - \varepsilon_1,\ s_{n_2} - \varepsilon_2,\ s_{n_3} - \varepsilon_3,\ \ldots,\ s_{n_p} - \varepsilon_p,$$
$$s_n + \varepsilon,\ s_{n_1} + \varepsilon_1,\ s_{n_2} + \varepsilon_2,\ s_{n_3} + \varepsilon_3,\ \ldots,\ s_{n_p} + \varepsilon_p,$$

les deux suites de quantités entre lesquelles sont comprises (s_n, s_{n+1}, etc.), (s_{n_1}, s_{n_1+1}, ...), (s_{n_2}, s_{n_2+1}, ...), etc. (n° 2, I).

II. Posons $a = s_n - \varepsilon$, puis a_1 égal à la plus grande des quantités a et $s_{n_1} - \varepsilon_1$, a_2 égal à la plus grande des quantités a_1 et $s_{n_2} - \varepsilon_2$, a_3 égal à la plus grande des quantités a_2 et $s_{n_3} - \varepsilon_3$; et ainsi de suite indéfiniment. La suite

$$a,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \text{etc.}, \qquad (a)$$

sera croissante, ou, à partir d'un certain terme, composée de quantités égales. D'après le n° 4, on aura

$$a < s_n,\quad s_{n+1},\quad s_{n+2},\quad \text{etc.},$$
$$a_1 < s_{n_1},\quad s_{n_1+1},\quad s_{n_1+2},\quad \text{etc.},$$
$$a_2 < s_{n_2},\quad s_{n_2+1},\quad s_{n_2+2},\quad \text{etc.};$$

et ainsi de suite indéfiniment.

III. De même, soient $A = s_n + \varepsilon$, A_1 égal à la plus petite des quantités A et $s_{n_1} + \varepsilon_1$, A_2 égal à la plus petite des quantités A_1 et $s_{n_2} + \varepsilon_2$, A_3 égal à la plus petite des quantités A_2 et $s_{n_3} + \varepsilon_3$; et ainsi de suite indéfiniment. La suite

$$A,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad \text{etc.},$$

Digitized by Google

sera décroissante, ou, à partir d'un certain terme, composée de quantités égales. D'après le n° 4, on aura

$$\begin{aligned} A &> s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \text{etc.}, \\ A_1 &> s_{n_1}, \quad s_{n_1+1}, \quad s_{n_1+2}, \quad \text{etc.}, \\ A_2 &> s_{n_2}, \quad s_{n_2+1}, \quad s_{n_2+2}, \quad \text{etc.}; \end{aligned}$$

et ainsi de suite indéfiniment.

IV. La différence $A - a$ est égale à 2ε; $A_1 - a_1$ est au plus égal à $2\varepsilon_1$, puisque a_1 est égal où supérieur à $s_{n_1} - \varepsilon$ et A_1 égal ou inférieur à $s_{n_1} + \varepsilon_1$; $A_2 - a_2$ est au plus égal à $2\varepsilon_2$, $A_3 - a_3$ à $2\varepsilon_3$; et ainsi de suite indéfiniment.

6. *Démonstration du théorème.* I. La suite (a) croissante et toujours inférieure à A (n° 5, IV) tend vers une limite finie, à moins que les termes de cette suite, à partir de l'un d'eux, ne restent égaux. Appelons α cette limite, ou cette valeur constante.

II. Les différences $A - \alpha$, $A_1 - \alpha$, $A_2 - \alpha$, etc. sont égales ou inférieures à $A - a$, $A_1 - a_1$, $A_2 - a_2$, etc.; celles-ci sont égales ou inférieures 2ε, $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, etc. Donc les différences $A - \alpha$, $A_1 - \alpha$, $A_2 - \alpha$, etc. sont nulles ou sont indéfiniment décroissantes, comme la suite des quantités ε, ε_1, ε_2, etc. La suite des quantités (A) a donc α pour limite, à moins que tous les termes de cette suite, à partir de l'un d'eux, ne soient égaux à α.

III. Pour simplifier le langage, convenons de dire qu'*une quantité constante est elle-même sa limite.* Nous pourrons résumer ce qui précède en disant que, pour $p = \infty$, dans tous les cas,

$$\lim a_p = \lim A_p = \alpha.$$

IV. Enfin, les quantités

$$s_{n_p}, \quad s_{n_p+1}, \quad s_{n_p+2}, \quad s_{n_p+3}, \quad \text{etc.},$$

comprises entre a_p et A_p, ont nécessairement la même limite α, parce que la différence $s_{n_p} - \alpha$, en valeur absolue inférieure à

$$A_p - a_p = (A_p - \alpha) + (\alpha - a_p),$$

a évidemment zéro pour limite, comme $A_p - \alpha$, $\alpha - a_p$. Le théorème général est donc démontré(*)

(*) Si la suite $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ n'est pas, à partir d'un certain terme, composée de quantités toutes égales entre elles, les deux suites $(a, a_1, a_2 \ldots)$, $(A, A_1, A_2, \ldots)$ ne

Digitized by Google

7. Exemples. I. Considérons la quantité variable

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Si p est impair, on aura

$$\pm (s_{n+p} - s_n) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) + \frac{1}{n+p},$$

quantité positive inférieure à $[1 : (n+1)]$, quel que soit p, car on peut l'écrire comme il suit :

$$\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right).$$

Si p est pair,

$$\pm (s_{n+p} - s_n) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p}.$$

C'est-à-dire que la différence $s_{n+p} - s_n$ est encore, en valeur absolue, inférieure à $[1 : (n+1)]$. On peut toujours choisir n de manière que $[1 : (n+1)]$, et, par suite, $s_{n+p} - s_n$, soit plus petit que ε, ε étant aussi petit que l'on veut. Donc s_n a une limite finie, pour n croissant indéfiniment.

II. Le contraire a lieu pour la quantité

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On trouve

$$H_{n+p} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p},$$

quantité toujours supérieure à

$$\frac{p}{n+p}.$$

---

peuvent pas se composer simultanément, à partir d'un certain terme, de quantités toutes égales à α. Car, s'il en était ainsi, à partir de ce terme, toutes les quantités intermédiaires s_k devraient aussi être égales à α.

Digitized by Google

Soit $p = n$. On aura $H_{n+p} - H_n$ supérieur à $\frac{1}{2}$. On ne peut donc pas choisir n tel que $H_{n+p} - H_n$, pour toute valeur de p, devienne aussi petit qu'on le veut, puisque pour $p = n$, et, a fortiori, pour des valeurs plus grandes, cette différence reste toujours supérieure à $\frac{1}{2}$. L'expression H_n, n'a donc pas de limite finie, quand n croit indéfiniment(*).

III. Soit encore l'expression

$$S_n = 2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \cdots - (-1)^n \frac{n+1}{n},$$

formée en ajoutant, dans l'expression s_n de l'exemple I, l'unité à tous les termes positifs, et retranchant l'unité de tous les termes négatifs. Si p est pair, on aura évidemment

$$S_{n+p} - S_n = s_{n+p} - s_n,$$

et, par suite, cette différence, est en valeur absolue, inférieure à $[1 : (n+1)]$. Mais si p est impair

$$\pm (S_{n+p} - S_n) = \pm (s_{n+p} - s_n) + 1.$$

Puisque $s_{n+p} - s_n$ est encore, en valeur absolue, inférieure à $[1 : (n+1)]$, $S_{n+p} - S_n$ est, en valeur absolue, supérieure à $1 - [1 : (n+1)] = [n : (n+1)]$. La différence $\pm (S_{n+p} - S_n)$ ne devient donc pas, pour n suffisamment grand, inférieure à une quantité donnée ε, QUEL QUE SOIT p, mais seulement si p est pair. Donc S_n n'a pas de limite finie. Comme $S_n = s_n$ si n est pair, et $S_n = s_n + 1$, si n est impair, il est évident d'ailleurs que s_n n'a pas non plus une limite infinie.

8. REMARQUES. I. On peut énoncer le caractère principal de convergence sous la forme abrégée suivante : *Une quantité variable dont les oscillations ont pour limite zéro a une limite finie*, théorème qu'il faut entendre, naturellement, dans le sens de l'énoncé du n° 1(**).

(*) On a vu plus haut (*Mathesis*, V, p. 193) que H_n a une limite infinie. M. Catalan a fait observer que, si l'on prend p égal à la partie entière de la racine carrée de n, $H_{n+p} - H_n$ est inférieur à $(1 : p)$ et devient aussi petit qu'on le veut, quand n et, par suite, p croissent indéfiniment. Il peut donc y avoir des valeurs de p (ici $p = E(\sqrt{n})$), même indéfiniment croissantes avec n, telles que $s_{n+p} - s_n$ soit aussi petit qu'on le veut, et en même temps, d'autres valeurs de p (dans le cas actuel, $p = n$) pour lesquelles le contraire a lieu. Voir encore l'exemple suivant.

Cette remarque prouve qu'il faut bien faire attention aux mots QUEL QUE SOIT p, de l'énoncé du caractère principal de convergence.

(**) Autre énoncé : *s_n a une limite finie, si* $\lim (s_{n+p} - s_n) = 0$, *pour* $n = \infty$, QUEL QUE SOIT p. Le nombre p peut être constant ou variable; indépendant de n, ou

Digitized by Google

II. On peut donner un caractère intuitif à la longue démonstration exposée n^{os} 2 à 6. Pour cela, on représente sur un plan les points ayant pour coordonnées rectangulaires

$$[(n, s_n),\ (n+1, s_{n+1}),\ \text{etc.}],\quad [(n_1, s_{n_1}),\ (n_1+1, s_{n_1+1}),\ \text{etc.}]$$

Par hypothèse, ils sont compris entre deux parallèles à l'axe des x; ces parallèles, dont la distance décroît indéfiniment, ont pour équations, successivement,

$$y = s_n \pm \varepsilon,\quad y = s_{n_1} \pm \varepsilon_1,\ \text{etc.}$$

On voit ensuite aisément que ces parallèles peuvent être remplacées par celles qui ont pour équations

$$(y = a,\ y = \mathrm{A}),\quad (y = a_1,\ y = \mathrm{A}_1),\ \text{etc.}$$

Celles-ci évidemment tendent vers une position limite, ayant pour équation $y = \alpha$.

III. Dans son *Lehrbuch der Analysis*, § 15, Lipschitz, dit, *par définition*, que la quantité variable s_k tend vers une limite quand ses oscillations peuvent devenir et rester aussi petites qu'on le veut. D'après cela, on peut énoncer le caractère général de convergence, en disant que *si une quantité variable a une limite, dans le sens de* Lipschitz, *elle en a aussi une dans le sens de* Duhamel. Autrement dit, la démonstration des n^{os} 2-6 prouve que les deux définitions sont équivalentes.

IV. Une variable toujours croissante, ou toujours décroissante, qui en valeur absolue, ne dépasse pas toute quantité donnée, a une limite finie, d'après le principe fondamental; d'après le n° 1 ci-dessus, elle vérifie aussi les conditions d'existence du caractère général de convergence. Réciproquement, d'après la démonstration donnée, n^{os} 2 à 6, chaque fois qu'une suite de quantités s_1, s_2, s_3, etc. vérifie les conditions du caractère général de convergence, s_p tend vers une limite finie α pour p croissant indifiniment; de plus, α est aussi la limite d'une suite croissante (a, a_1, a_2, etc.), ou d'une suite décroissante (A, A_1, A_2, etc.), les quantités (a) et (A) différant aussi peu qu'on le veut des quantités (s). Le principe fondamental de la méthode des limites et le caractère général de convergence sont donc équivalents et peuvent toujours se remplacer

---

variant avec n, par exemple, croissant indéfiniment en même temps que celui-ci, (égal à la partie entière de la racine carrée ou cubique de n, ou à n^2, n^3, etc). Voir l'exemple précédent, note.

Digitized by Google

l'un l'autre dans les démonstrations où l'un des deux permet de conclure qu'une variable a une limite; néanmoins, suivant les cas, c'est l'un ou l'autre qui conduit le plus rapidement à une conclusion de ce genre.

V. Pour LIPSCHITZ, un nombre incommensurable est la limite (dans le sens qu'il donne à ce mot) non commensurable d'une suite de nombres commensurables, procédant suivant une loi déterminée *quelconque*, pourvu que ces nombres commensurables vérifient les conditions du caractère général de convergence. Au premier abord, cette définition semble un peu plus générale que celle que nous avons empruntée à DEDEKIND; car, dans celle-ci, au fond, le nombre incommensurable est la limite (dans le sens de LIPSCHITZ) d'une suite de nombres commensurables *croissants* ou *décroissants;* or, c'est là un mode de variation moins général que celui que la définition de LIPSCHITZ permet d'imaginer. Mais, d'après la démonstration donnée plus haut, n^os 2 à 6, si s_1, s_2, s_3, etc. sont les nombres commensurables qui ont pour limite un nombre incommensurable α, quelle que soit la loi d'après laquelle procèdent les nombres s_1, s_2, s_3, etc., il existe une suite croissante (a, a_1, a_2, etc.) et une suite décroissante (A, A_1, A_2, etc.) ayant la même limite α, les (a) et les (A) différant aussi peu qu'on le veut des (s). Les deux définitions ne sont donc pas essentiellement distinctes. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 311.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 71.)

Si la somme des carrés des distances d'un point à n droites données est un minimum, ces distances représentent un système de forces en équilibre.

(J. NEUBERG.)

Le carré de la distance d'un point M à une droite est égal à la somme des carrés de ses distances à deux plans rectangulaires menés par la droite, et la première distance est aussi la résultante des deux autres. Cette remarque ramène la question 311 à une autre que nous avons traitée *in extenso* dans notre *Mémoire sur le tétraèdre* (Supplément à la livraison de février 1885 de *Mathesis*), p. 16-21.

M. Liénard a traité la question par la formule de la distance d'un point à une droite. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 319.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 71.)

Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = a \tag{1}$$
$$x + v + w = b \tag{2}$$
$$y + w + u = c \tag{3}$$
$$z + u + v = d \tag{4}$$
$$xu = yv = zw. \tag{5}$$

Solution par MM. Falisse *et* Gob. Si l'on combine convenablement les équations (1), (2), (3), (4), on trouve

$$x - u = \frac{a + b - c - d}{2}, \tag{6}$$

$$y - v = \frac{a + c - b - d}{2}, \tag{7}$$

$$z - w = \frac{a + d - b - c}{2}. \tag{8}$$

Prenons pour inconnue auxiliaire p les produits égaux xu, yv, zw et désignons par $2\lambda_1$, $2\lambda_2$, $2\lambda_3$ les seconds membres des équations (6), (7), (8). Si p était connu, le problème serait ramené à la résolution des trois systèmes

$$\begin{cases} x - u = 2\lambda_1, \\ xu = p; \end{cases} \quad \begin{cases} y - v = 2\lambda_2, \\ yv = p; \end{cases} \quad \begin{cases} z - w = 2\lambda_3, \\ zw = p, \end{cases}$$

et l'on aurait

$$x = \lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 + p}, \quad y = \lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 + p}, \quad z = \lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 + p},$$

substituons ces valeurs dans l'équation(1); nous aurons pour déterminer p l'équation

$$\frac{a + b + c + d}{4} = \pm \sqrt{\lambda_1^2 + p} \pm \sqrt{\lambda_2^2 + p} \pm \sqrt{\lambda_3^2 + p},$$

qui, étant rendue rationnelle, est du 4e degré.

Digitized by Google

*Question 427.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Si des sommets d'un tétraèdre ABCD, *dont le volume est* V, *on mène aux centres de gravité a, b, c, d des faces opposées les droites* Aa, Bb, Cc, Dd, *on pourra former un quadrilatère gauche* $\alpha\beta\gamma\delta$ *ayant ses côtés égaux et parallèles à* Aa, Bb, Cc, Dd. *De plus, le volume* V *du tétraèdre* $\alpha\beta\gamma\delta$ *est les* $\frac{16}{27}$ *du volume* V. (Mogni.)

Solution par M. L. Van den Broeck. Soit G le point de concours de Aa, Bb, Cc, Dd; on sait que

$$BG = \tfrac{3}{4}Bb,\quad CG = \tfrac{3}{4}Cc,\quad DG = \tfrac{3}{4}Dd,\quad Ga = \tfrac{1}{4}Aa,\quad \text{vol. GBCD} = \tfrac{1}{4}V.$$

Menons BN parallèle et égal à GC, NR parallèle et égal à GD et joignons RG. La figure GBNC étant un parallélogramme, GN passe par le milieu M de BC. De même, la figure GNRD est un parallélogramme; donc GR et DM sont deux médianes du triangle GND, et comme on a déjà $Ma = \frac{1}{2}aD$, GR est dirigé suivant Ga, et est égal à $3Ga = \frac{3}{4}Aa$. Il en résulte que le quadrilatère gauche GBNR a ses côtés parallèles aux droites Aa, Bb, Cc, Dd et égaux aux trois quarts de ces lignes(*).

Les tétraèdres DGBC, RGBN sont équivalents comme ayant des bases équivalentes BGC, GBN et leurs sommets sur une parallèle DR à la base. Mais il est évident que

$$\frac{\text{vol. } \alpha\beta\gamma\delta}{\text{vol. GBNR}} = \left(\frac{\beta\gamma}{BG}\right)^3 = \frac{64}{27};$$

par conséquent

$$\text{vol. } \alpha\beta\gamma\delta = \tfrac{64}{27}\cdot\tfrac{1}{4}V = \tfrac{16}{27}V.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

492. Étant données les équations

$$y^2 - x^2 - 2xy + 2y = 0,\quad x^2 + y^2 = 1,$$

qui représentent une hyperbole équilatère et une circonférence : 1° Les deux courbes ont une tangente commune AD en un point A. 2° Elles se coupent à angle droit en un autre point B. 3° La ligne AB est un diamètre de l'hyperbole. 4° EF étant une corde du cercle parallèle à AD, les lignes AF, EB se rencontrent sur l'hyperbole. (H. Brocard.)

(*) La première partie de la question 427 résulte encore de quelques propositions générales de Mécanique. (J. N.)

Digitized by Google

493. L'équation

$$x^8 - 16x^7 - 60x^6 + 16x^5 + 134x^4 + 16x^3 - 60x^2 - 16x + 1 = 0$$

a pour racines

$$\operatorname{tg} 3^\circ,\ \operatorname{tg} 21^\circ,\ \operatorname{tg} 33^\circ,\ \operatorname{tg} 39^\circ,\ \text{et}\ \cot 3^\circ,\ \cot 21^\circ,\ \cot 33^\circ,\ \cot 39^\circ;$$

et il n'y a pas d'équation plus simple, à coefficients entiers, admettant une de ces racines. (E. Gelin.)

494. Déterminer le triangle équilatéral maximum ou minimum circonscrit à une ellipse donnée.

495. Aux faces ABC, ACD, ADB d'un tétraèdre ABDC, on circonscrit trois sphères égales. Démontrer que les plans tangents aux points diamétralement opposés à A se coupent sur la corde commune aux trois sphères. (Farisano.)

496. On donne une circonférence O et la tangente AT au point A. Une tangente mobile touche la circonférence en B et rencontre AT en C. Trouver le lieu du point de rencontre du rayon OB avec la parallèle à OA menée par C (Par le calcul et la géométrie). (Fr. Falisse.)

×**497.** Soient

$$A = \frac{a}{(b-c)(b-d)(c-d)},\quad B = \frac{b}{(a-c)(a-d)(c-d)}$$

$$C = \frac{c}{(a-b)(a-d)(b-d)},\quad D = \frac{d}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

On a

$$(A - B + C - D)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right) = 4^3.$$

(P. A. Mac Mahon.)

498. Le moment d'inertie d'un quadrilatère, par rapport au point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés, est égal à la 48e partie de l'aire, multipliée par la somme des carrés des côtés et des diagonales. (E. Cesàro.)

499. Résoudre le système d'équations suivant, où $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_1 C^1_{n+i} + x_2 C^2_{n+i} + \cdots + x_n C^n_{n+i} = 1;$$

C^r_p désigne le nombre de combinaisons de p objets, r à r.

500. D'un point M d'une circonférence O, on abaisse une perpendiculaire MP sur un diamètre fixe AOB. Calculer l'aire et le périmètre de la courbe engendrée par le point Q, projection de P sur la tangente en M.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES(*).

(Pour les rectifications, voir pages 48, 72, 120, 144, 166, 216, 264).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

	Pages.
×Définition d'un nombre incommensurable (P. M.)	49
Questions d'arithmologie; d'après M. de Rocquigny	78
Sur une loi symbolique remarquable, solution de la question 67; par M. E. Cesáro	81
×Sur l'interversion des facteurs dans un produit; par M. Saurel	180
×Principe fondamental de la méthode des limites (P. M.)	193
Sur un théorème de M. Mansion; par M. E. Cesáro	248
×Question 344; solutions par MM. Van den Broeck et Cesáro	20, 228
×Question 236; solution par M. J. N.	35
×Question 343; solutions par MM. Van den Broeck et Cesáro	65
×Question 364; solutions par MM. Lemoine et Jamet	67
×Question 106; solution par M. J. Neuberg	84
×Question 368; solution par M. E. Cesáro	118

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Une équivalence algébrique; d'après M. L. Kronecker	102
Quelques problèmes élémentaires relatifs au jeu de dés; par M. Weill	152
Questions 91, 118; solution par MM. J. Neuberg et Van den Broeck	12, 57, 76
×Question 365; solutions par MM. Gob, Henrard, etc.	20
×Question 337; solution par M. Gob	41
×Question 342; solutions par MM. Van den Broeck, Renson, etc.	43
×Question 189; solution par M. Van den Broeck, Gillet	59
Questions 52 et 78; solution par M. Fauquembergue	204
Question 393; solution par M. Cesáro	259
×Question 319; solution par MM. Falisse et Gob	278

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Volume d'un prismatoïde; d'après MM. Halsted et Latars	9, 74
Propriétés diverses du cercle et de la droite de Brocard; par M. E. Lemoine	103

(*) On a renvoyé, pour chaque question traitée, à tous les passages où l'on s'occupe de cette question. Plusieurs articles sont indiqués dans deux ou trois subdivisions de la table des matières. Les articles marqués d'une croix peuvent être comprise en ne s'aidant que des mathématiques élémentaires (P. M.)

Digitized by Google

Pages.

Sur les constructions dans le plan et dans l'espace avec la droite seule; par M. De Tilly 124
Remarques de Géométrie élémentaire; par M. E. Cesáro (solution des questions 201, 274, 419) 128
Sur le quadrilatère harmonique; par M. J. Neuberg 202, 217, 241, 265
Questions de Géométrie et de Trigonométrie; par MM. Catalan, Boubals, etc. 250
Question 337; solutions par MM. Lemoine, Thiriart, etc. 16
Question 339; solutions par MM. Thiry, Pisani, etc. 18
Question 377; solution par M. F. Falisse 21
Question 193; solution par M. J. Gillet 34
Question 359; solution par M. Minoliti 44
Question 99; solution par M. Liénard 58
Question 225; solutions par MM. Bastin, Liénard, etc. 60
Question 378; solutions par MM. Meurice et Gob 68
Question 240; solutions par MM. Bastin, de Rocquigny, etc. 87
Question 284; solutions par MM. Falisse, Maryssael, etc. 92
Question 349; solution par MM. Van den Broeck et Liénard. 117
Question 366; solutions par MM. Cesáro, Henrard, etc. 117
Question 274; solutions par MM. Gob, Henrard, etc.. 134
Question 372; solution par MM. Servais. 137
Question 406; solutions de MM. Blondeel, Boedt, etc.. 139
Question 407; solutions par MM. Boedt, Colette, etc.. 141
Question 408; solutions par MM. Blondeel, Colette, etc.. 142
Question 272; solution de M. Schoute 161
Question 339; solution par M. le Dr Sum 162
Question 409; solutions par MM. Blondeel, Boedt, etc. 189
Question 420; solutions par MM. Blondeel, Boedt, etc. 189
Question 421; solution par MM. Pisani et Gob. 191, 223
Question 431; solution par MM. Boedt, Collin, etc. 191
Question 204; solution par M. Brocard 227
Question 376; solutions par MM. Colette, Meurice, etc. 230
Question 422; solutions par MM. Lambert, Gob, etc.. 233
Question 423; solutions par MM. Lambert, Gob, etc.. 234
Question 424; solution par MM. G. Renson et Henrard 235
Question 448; solutions par MM. Gillet, Vernory, etc. 236
Question 449; solution par MM. Gelin, Deprez, etc. 237
Question 379; solution par MM. Servais, Colette, etc.. 257
Question 451; solutions par MM. Henrard, Fairon, etc. 261
Questions 453; solutions par MM. Gob, Henrard, etc.. 262
Question 311; solution par M. J. Neuberg 277
Question 427; solution par M. Van den Broeck. 279

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Note sur les raccordements paraboliques; par M. d'Ocagne 25
Théorèmes sur la parabole; par M. Bergmans 71, 95, 175
Sur la question 313; par MM. J. Neuberg, V. Jamet, P. Mansion 10
Question 326; solution par M. V. Jamet. 87
Question 300; solutions par MM. Barbelinet, Brocard, etc. 68

Digitized by Google

Pages.
Question 235; solutions par MM. Ruex, Pisani, etc. 85
Questions 341 et 350; solutions par MM. Minoliti, Pisani 163
Question 192; solution par M. Bastin 181
Question 360; solutions par MM. Jamet et Verstraeten 187
Questions 363; solutions par MM. Gilbert et Jamet 212

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

La cochléoïde (Question 257) par M. J. Neuberg 89
Transformation des propriétés barycentriques au moyen de la méthode des polaires réciproques; par M. M. d'Ocagne. 170
Sur la courbe de Watt; par M. E. Catalan 154, 222
Question 292; solution par M. Pisani. 36
Question 314; solution par MM. Boubals, Gillet; notes par MM. Dewulf et Neuberg 110
Question 152; solution par M. Boubals 131
Ecole polytechnique de Paris; composition de Mathématiqnes. Solution par M. G. Boubals 157
Questions 258 et 259; solutions par MM. Brocard et Neuberg 208
Question 404; solution par MM. Falisse, Farisano, etc. 260

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES(*).

Sur l'évaluation approchée des aires planes; par M. G. Petit-Bois 5, 27
Remarques sur le cercle osculateur à l'ellipse; par M. E. Cesáro 7
Sur l'hélice osculatrice; par M. E. Cesáro 32
Questions de licence; par M. H. Brocard 54, 130, 156, 169, 224
Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers; par M. E. Cesáro 55
Sur les ombilics des surfaces; par M. E. Catalan 73
Sur la dérivée n^{ième} d'une fonction de fonction (P. M.) 76
Sur le second principe de la moyenne; d'après M. L. Kronecker 97
Sur les équations différentielles simultanées; par M. J. De Tilly 121
Sur l'axe central et l'axe instantané glissant; par M. J. De Tilly 145
×Définition d'un nombre incommensurable (P. M.) 49
×Principe fondamental de la méthode des limites (P. M.). 193
Caractère général de convergence (P. M.) 270
Sur la distance de deux droites infiniment voisines; par M. E. Cesáro. . . 196
Question 286; solution par M. Minoliti 35
Question 342; solution d'après Fermat 43
Question 249; solution par M. E. Cesáro 132
Question 297; solution par M. Timmerhans 136
Question 218; solutions par MM. Cesáro et Radicke 182, 224
Question 285; solutions par MM. Keelhoff et Brocard. 185
×Question 204; solution par M. H. Brocard. 227
Question 217; solutions par MM. Bastin et Radicke 255

(*) Y compris la Géométrie infinitésimale et la cinématique.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

	Pages.
A. Genocchi et Peano. Calcolo differenziale etc. (Peano)	11
P. Brasseur. Décomposition des quantités algébriques (J. N.)	11
Notations abrégées	31
Van den Broeck. Exercices de géométrie élémentaires (P. M.)	34
J. Casey. A Sequel to Euclid (P. M.)	76
Quelques définitions mathématiques, d'après l'Académie; par le Dr. Charbonier	108
M. d'Ocagne. Coordonnées parallèles et axiales (J. N.)	225
H. Laurent. Traité d'analyse. Tome premier (P. M.)	227
H Genaille et Ed. Lucas. Réglettes multiplicatrices, etc.	252
G. Gascó. Tablas de logarithmos, etc.	252
H. Hankel (tr. Dewulf). Histoire de la nouvelle géométrie	253
G. Garbieri. Algebra elementare	253
J. Carnoy. Cours de géométrie analytique (plane)	253
J. Casey. Analytical Geometry of conic Sections	254

SUPPLÉMENTS (144 pages.)

J. Neuberg. Mémoire sur le tétraèdre	1-72
P. Mansion. Discours sur les travaux mathématiques de M. E. Catalan	1-38
J. De Tilly. 1. Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation. 2 Sur une lacune qui semble exister au début de la Géométrie descriptive	1-30
J. Neuberg. Sur les figures semblablement variables	1-4

QUESTIONS D'EXAMEN.

Relations trigonométriques entre les angles d'un triangle	23
Questions d'examen (177-185), (186-196), (197-203), (203-207), (208-217), (218 à 221)	47, 119, 168, 216, 239
Théorèmes sur la parabole; par M. C. Bergmans	71, 95, 175
École polytechnique de France. Composition de mathématiques et de géométrie descriptive (concours de 1885)	157
École spéciale militaire de S. Cyr (concours de 1885)	160

QUESTIONS EXTRAITES DE LA « NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE » ET REPRODUITES DANS « MATHESIS. »

N. C. M.	Mathesis.	N. C. M.	Mathesis.	N. C. M.	Mathesis.
Nos 80	Nos 458	Nos 205	Nos 239	Nos 399	Nos 292
81	459	227	239	410	461
98	221	250	291	510	204
102	260	274	434	511	206
107	238	281	427	513	209
108	293	282	435	569	309
161	353	285	436	582	490
167	231	288	426	588	460
169	232	289	425		
170	244	323	256		

Une solution de la question 210 de la N. C. M. a été indiquée dans ***Mathesis***, II, p. 248.

Digitized by Google

QUESTIONS (*).

	POSÉE T. I, p.	RÉSOL. T. V, p.
3	12	
17	30	
26	48	
32	62	
×34	62	
43	95	
×45	95	16
52	96	204
67	168	82-83
72	168	R
75	184	150
78	184	206
×91	206	12, 14, 56
92	206	
93	206	
94	206	
95	206	
99	207	58
Tome II		
×106	48	84
×118	71	12, 15
119	71	
120	71	
134	119	
×142	120	
152	158	131
160	159	
162	159	
169 (2e p.)	175	R
173	176	
174	176	
×184	192	
×189	208	59
×190	208	R
192	230	180
×193	231	34
195	231	
196	231	
×199	250	
Tome III		
×201	23	128
×203	23	
204	23	227
206	23	
209	24	
217	47	255
218	47	182, 224

	POSÉE T. III, p.	RÉSOL. T. V, p.
×219	47	
×225	48	60
×230	72	35
232	72	
233	72	R
×235	94, 144	85
240	95	87
×242	95	
×243	118	
244	118	
×245	118	R
249	119	133
×250	119	R
×251	119	R
252	143	
256	144	
257	144	89
×258	144	208
259	144	208
260	160	
×261	160	
265	175	R
266	175	R
267	175, 192	
×272	192	161
273	192	
×274	215	128, 134
×275	215	R
277	216	R
×278	216	
×280	216	R
×281	216	
×282	216	R
283	231	
×284	231	92
285	231	185
286	232	35
×288	232	R
×290	232	R
291	232	R
292	232	36
293	232	R
294	248	
295	248	
296	248	R
297	248	136
298	248	R
299	248	R
300	248	63

	POSÉE T. IV, p.	RÉSOL. T. V, p.
306	24	
310	48	R
311	71	277
314	71	110
317	71	
×318	71	
×319	71	278
×321	119	
323	94	
324	94	
325	94	
326	94	37
×327	95	R
×332	95	41
×333	119	
×334	119	R
335	120	R
336	120	R
337	120	16
×339	120	18, 162
340	120	R
341	142	163
×342	142	43
×343	143, 159	65
×344	143	20, 228
×346	143	
347	143	R
×348	143	R
×349	143	117
350	143	165
351	143	R
352	159	R
353	159	R
354	159	
355	159	
×356	159	
×357	159	
358	159	
×359	175	44
360	175	187
361	175	R
×362	175	R
363	175	212
×364	175	67
×365	175	20
×366	199, 215	117
367	199	R
×368	200	118
369	200	R

(*) La Rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R et engage ses lecteurs à tâcher de résoudre de préférence les autres questions.

Digitized by Google

	POSÉE T. IV, p.	RÉSOL. T. V, p.
370	200	R
×371	200	
×372	200, 231	137
×373	215	R
374	215	R
×375	215	R
×376	216	230
×377	216	21
×378	216	68
×379	216	257
×380	216	R
381	216	R
×382	216	R
×383	231	
×384	231	
385	231	
×386	231	
387	231	
388	246	R
389	246	R
390	247	
391	247	R
392	247	R
393	247	259
394	247	R
×395	247	R
396	248	
397	248	R
×398	248	R
×399	248	R
400	248	

Tome V

×401	21	R
×402	22	R
×403	22	R
404	22	260
405	22	
×406	22	139
×407	22	141
×408	22	142
×409	22	189
410	22	R
411	23	
412	23	
413	46	R
414	46	R
415	46	R
416	46	R
417	46	R
418	47	
419	47	129
×420	47	189
×421	69, 191	223
×422	70	233
×423	70	234
424	70	235
×425	70	
×426	70	R
×427	70	279
428	70	R
429	94	R
430	94	
×431	94	191
432	94	R
433	94	R
434	94	R
435	94	
436	94	
×437	119	R
×438	119	R
439	119	
440	119	R
×441	143	R
×442	143	
×443	143	R
×444	143	R
445	143	R
446	144	
× 447	144	R
×448	144	236
×449	144	237
×450	167	R
×451	167	261
452	167	R
×453	167	262
454	167	
455	167	
×456	167	R
457	192	
458	192	R
459	192	R
×460	192	R
461	192	R
462	192	
463	192	
×464	215	R
×465	215	R
×466	215	R
467	215	R
468	215	R
×469	215	R
470	215	R
×471	215	
472	215	R
473	238	
×474	238	R
×475	238	R
×476	238	R
×477	238	R
478	239	R
479	239	
×480	239	R
×481	239	R
×482	239	R
×483	263	R
×484	263	R
×485	263	R
×486	263	R
×487	263	R
488	263	
×489	264	R
490	264	
491	264	
492	279	
493	280	
494	280	
495	280	
496	280	
497	280	
×498	280	
499	280	
500	280	

Digitized by Google

TABLE DES AUTEURS.

Allersma, 37, 39.
Ampère, 30.
Anthony, 239.
Barbarin, 70, 85, 94, 163.
Barbelinet, 63.
Barlet, 118.
Bartier, 93.
Bastin, 60, 86, 87, 131, 181, 217, 255.
Beasley, 24.
Beltrami, 12.
Bérard, 30.
Bergmans, 71, 95, 175.
Blondeel, 139, 142, 143, 189, 190, 233, 234.
Boedt, 92, 139, 141, 189, 190, 191, 204, 231, 234, 235, 261.
Boen, 133, 134.
Boubals, 110, 131, 157, 251.
Brasseur, 11.
Brill, 144, 236.
Brocard, 30, 36, 54, 64, 76, 89, 93, 94, 130, 156, 159, 165, 166, 168, 169, 185, 208, 224, 227, 251, 255, 279.
Carnoy, 253.
Casey, 76, 254.
Catalan, 43, 53, 65, 73, 89, 118, 154, 182, 185, 187, 222, 224, 250, 251, 255, 259, Supplément II.
Cesáro (E.), 7, 32, 35, 47, 55, 59, 65, 81, 84, 89, 117, 118, 128, 133, 134, 136, 137, 182, 184, 192, 196, 208, 228, 248, 259, 264, 280.
Chasles, 65.
Choisis, 140, 143, 189, 236, 237.
Clevers, 22.
Colette, 19, 93, 140, 141, 142, 189, 230.
Collin, 140, 142, 189, 191, 231, 235, 261, 262.
Couturiaux, 140, 141, 143, 189, 190.
Darboux, 161.
Daniel, 140.
Delcourt, 93
Deprez, 118, 140, 141, 143, 189, 190, 191, 215, 232, 234, 236, 238, 240, 252, 258, 261, 262, 263.
Descans, 140.
De Tilly, 121, 124, 145 et suppl. III.
Dewulf, 46, 47, 113, 253.
D'Hondt, 190, 233, 234, 262.
Fairon, 261, 262.
Falisse, 16, 17, 20, 21, 68, 93, 118, 134, 140, 141, 143, 165, 166, 189, 214, 237, 251, 255, 260, 278, 280.
Falkenburg, 89.
Farisano, 94, 204, 214, 215, 216, 231, 258, 260, 261, 280.
Fauquembergue, 205, 215, 264.
Fermat, 44.
Fransolet, 189.
Garbieri, 253.
Gascó, 252.
Gelin (E.), 236, 237, 263, 280.
Gelin (H.), 92.
Genaille, 252.
Gergonne, 30.
Gilbert, 70, 212.
Gillet, 34, 59, 86, 110, 120, 212, 215, 236, 261.
Gob, 16, 17, 19, 20, 39, 41, 46, 62, 69, 86, 134, 135, 140, 141, 143, 165, 167, 189, 191, 214, 215, 231, 233, 234, 258, 260, 261, 262, 278.
Halsted, 9.
Hammond, 238.
Hankel, 253.
Hauzeur, 140, 191.
Henrard, 16, 21, 68, 93, 118, 134, 140, 189, 214, 235, 261, 262.
Henrion, 93.
Herrebaut, 191.
Heyne, 260.
Jamet, 11, 37, 68, 187, 192, 214.
Jenkins, 215.
Jeřábek, 92, 110, 119, 135, 431, 189, 214, 233, 234.
Keelhoff, 17, 185, 261.
Kramp, 30.
Kronecker, 97, 102.
Lambert, 44, 70, 86, 118, 233, 234, 236, 258.
Larrivet, 94.
Latars, 74.
Laurens, 140, 189, 231.
Laurent, 227.
Lebrun, 93.
Lemoine, 16, 21, 22, 34, 67, 103, 163, 181.
Leudesdorf, 263.
Liénard, 58, 62, 86, 92, 117, 131, 165.
Lucas, 35, 192, 252.
Mac-Lellan, 143.
Mac Mahon, 280.
Mahy, 93.
Malet, 94.
Mandart, 262.
Mansion, 9, 11, 25, 33, 34, 44, 49, 55, 76, 92, 97, 124, 193, 227, 248, 270. Supplém. II.
Maryssael, 92, 140, 141, 189.
Mc-Alister, 239, 263.
Mennesson, 191.
Meurice, 68, 140, 141, 143, 189, 191, 258.
Miller, 144, 237.
Mineur, 140, 141, 143, 189, 191, 231, 258.
Minoliti, 20, 35, 44, 93, 140, 163, 214.
Mister, 137, 138.
Mogni, 70, 279.
Morley, 238, 239.
Mullendorf, 119.
Neuberg, 8, 10, 11, 12, 17, 22, 23, 35, 40, 41, 48, 60, 65, 84, 88, 89, 93, 103, 115, 117, 119, 128, 140, 143, 144, 157, 166,

Digitized by Google

167, 185, 191, 202, 208, 210, 216, 217, 225, 232, 238, 239, 241, 252, 257, 259, 261, 262, 265, 277, et suppl. I, IV.
Ocagne (d'), 25, 170, 225.
Peano, 11.
Pelz, 65.
Petit-Bois, 5, 27.
Picard, 238
Pisani, 17, 19. 36, 62, 86, 93, 117, 118, 140, 141, 143, 189, 191, 259, 260.
Pleyers, 143.
Poilvache, 140, 143, 189, 214.
Radicke, 62, 184, 255.
Remy, 43.
Renson, 43, 140, 189, 214, 235, 262, 264.
Rochetti, 140, 141, 191.
Rocquigny (de), 19, 20, 22, 35, 67, 78, 89, 120, 228, 240, 260.
Roersch, 39.
Ruchonnet, 33.
Ruex, 85
Saurel, 180.
Schoute, 161.
Servais (Cl.), 137, 214, 231.
Simmons, 144, 237.
Smeets, 70, 235.
Steen, 31.
Steiner, 46, 65, 186, 188.
Sterken, 189.
Stouvenel, 12, 56.
Stuyvaert, 17.
Sum, 162.
Taylor, 143.
Tesch, 36, 93.
Thiriart, 16, 17.
Thiry, 16, 17, 22, 69, 93, 140, 141, 143, 189, 191, 230, 240, 258, 261.
Timmerhans, 136.
Tucker, 22, 215.
Van Aubel, 58.
Van den Broeck, 15, 20, 34, 43, 56, 59, 65, 84, 117, 190, 279.
Verniory, 140, 141, 143, 191, 214, 215, 231, 232, 233, 236, 258, 261, 262, 264.
Verstraeten, 63, 188.
Weill, 22, 23, 152.
Wéry, 93.
Wright, 263.
Young, 238.

Digitized by Google

DISCOURS

SUR LES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE

M. Eugène-Charles CATALAN,

PAR

P. MANSION,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE GAND,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Digitized by Google

ABRÉVIATIONS.

AP. Mémoires de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*.

BB. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

CR. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

EP. Journal de l'École polytechnique.

L. Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville.

MB. Mémoires de l'Académie royale de Belgique.

MCB. Mémoires couronnés et autres mémoires de l'Académie royale de Belgique, in-4°.

M8B. Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique.

MM. Mélanges mathématiques (ouvrage formant le tome II de la 2e série des Mémoires de la Société royale des sciences de Liège).

NAM. Nouvelles Annales de Mathématiques.

NCM. Nouvelle Correspondance mathématique.

(2), III, 417-420 signifie 2e série, tome III, pages 417-420.

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2e série, t. XII.)

Bruxelles. — F. Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 108.

Digitized by Google

DISCOURS

PRONONCÉ LE 7 DÉCEMBRE 1884,

A LA SALLE ACADÉMIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,

A L'OCCASION

DE LA PROMOTION DE M. E. CATALAN A L'ÉMÉRITAT (*).

CHER ET VÉNÉRÉ MAÎTRE,

Le Comité chargé de l'organisation de la fête d'aujourd'hui m'a appelé à l'honneur de porter la parole en son nom, pour esquisser, en un tableau rapide, l'ensemble de vos principales publications scientifiques.

Il n'était pas difficile de trouver, parmi vos anciens élèves de Paris, des voix plus autorisées que la mienne pour rendre à votre talent, comme professeur et comme savant, un hommage mérité.

Mais l'éloignement et des recherches absorbantes n'ont pas permis, aux illustres géomètres auxquels je fais allusion, d'aborder l'examen rétrospectif de vos nombreux travaux.

Ceux de vos disciples plus jeunes, qui occupent si honorablement, à côté de vous, des chaires de votre Université, sont engagés, maintenant, dans des études trop éloignées des vôtres; et ils ne pouvaient guère, ont-il dit avec trop de modestie peut-être, entreprendre l'analyse détaillée de vos publications.

C'est ainsi que, sans avoir eu jamais le bonheur d'entendre vos savantes leçons, la tâche m'est échue de parler ici au nom de tous ceux qu'elles ont initiés aux mathématiques transcendantes.

(*) A cette occasion, les anciens élèves et les amis de M. Catalan lui ont offert son portrait, dû à l'habile pinceau de M. Delpérée.

Digitized by Google

Quoique je connaisse toutes les difficultés de cette honorable mission, j'ai été heureux de l'accepter, parce qu'elle me permet de vous donner publiquement un témoignage d'amitié et de reconnaissance pour la bonté avec laquelle vous avez encouragé mes premiers travaux; pour l'appui que vous n'avez cessé de m'accorder, depuis que, essayant de marcher sur vos traces, je me suis consacré à l'étude de l'analyse mathématique.

Pour un autre motif encore, je suis heureux de porter la parole en ce jour. En 1870, j'ai eu l'honneur de subir, moi élève de l'Université de Gand, devant la Faculté des sciences de Liège, les épreuves du doctorat spécial en mathématiques. Je n'oublierai jamais, Messieurs (*), l'extrême bienveillance avec laquelle vous m'avez accueilli, ni les suffrages unanimes dont vous avez couronné mes efforts, en cette heure solennelle de ma vie.

En venant donc aujourd'hui contribuer à la glorification de l'un de vos plus illustres professeurs, d'un maître qui a été pour moi un guide et un ami depuis quinze ans, c'est d'une dette de gratitude envers lui et envers l'Université de Liège que j'essaie de m'acquitter, dans la mesure de mes faibles forces. Puissé-je ne pas rester trop au-dessous de ma tâche et ne pas tromper la confiance du Comité d'organisation!

Maintenant, cher et vénéré Maître, permettez-moi d'aborder l'exposé de vos travaux en lui donnant cette forme impersonnelle qui sied si bien à la plus abstraite des sciences positives, à nos chères mathématiques.

Permettez-moi, en particulier, de parler de vous à la troisième personne, comme si vous étiez, dans cette vaste assemblée, quelque auditeur dont je ne soupçonnerais pas la présence. Ainsi, je serai plus à l'aise; je serai plus libre de vous louer hautement comme si vous n'étiez pas là, et j'oserai aussi, çà et là, mêler à mes éloges quelques critiques, discrètes et bienveillantes, comme il convient à un disciple et à un ami.

(*) MM. les professeurs de la Faculté des Sciences de Liège.

Digitized by Google

I.

INTRODUCTION.

La carrière de M. Catalan se divise naturellement en trois périodes de durées inégales, dont la première commence en 1835 pour se terminer en 1852; la deuxième s'étend jusqu'à sa nomination à l'Université de Liège, en 1865; la dernière enfin commence à cette date et, espérons-le, pour notre cher jubilaire et pour la science, elle ne se terminera pas de sitôt.

La première période est caractérisée par un grand nombre de Mémoires où il aborde et résout, souvent avec un rare bonheur, diverses questions d'analyse et de géométrie infinitésimale, alors à l'ordre du jour chez les géomètres. Dans la deuxième, ce sont les publications d'un caractère à la fois pédagogique et scientifique qui prédominent; enfin dans la troisième, plus libre de son temps et de son travail, M. Catalan se laisse aller à ses propres inspirations et suit davantage une voie originale.

Mais cette division en trois périodes n'est pas aussi absolue que cette esquisse peut le faire croire; et, je me hâte de le dire, il m'arrivera plus d'une fois, dans la suite, de rapprocher des travaux anciens et des travaux récents de notre éminent collègue.

M. Catalan est, en grande partie, un autodidacte. Né à Bruges, comme deux autres mathématiciens illustres, Stevin et Grégoire de Saint-Vincent, il fut élevé à Paris, où son père était venu s'établir comme architecte. Il fréquenta, dans cette ville, des cours de géométrie pratique, de perspective, d'architecture et de construction, soit à l'École de dessin, soit à l'École des beaux-arts. Mais son aptitude pour les mathématiques spéculatives fut remarquée par Lefébure de Fourcy, qui le prit en affection et

Digitized by Google

lui donna le conseil de se présenter à l'École polytechnique. M. Catalan, déjà répétiteur à l'École de dessin, se laissa aisément persuader. Il se fit pendant six mois l'élève de M. Delisle au collège Saint-Louis et il fut reçu à l'École polytechnique en 1833. En même temps, il remportait le prix d'honneur au grand concours des Mathématiques. Sa composition nous a été conservée (1) : il résout, aussi complètement que possible, une question difficile, en employant simultanément les ressources de l'analyse et de la géométrie, comme il le fera si souvent plus tard, lorsqu'il abordera des problèmes d'une nature plus élevée.

A sa sortie de l'École polytechnique (1835), M. Catalan, abandonnant la carrière des Ponts et Chaussées, fut nommé professeur au collège de Châlons-sur-Marne; puis il revint à Paris, où il fonda, avec Abel Pagès, Sturm et Liouville, la célèbre École préparatoire Sainte-Barbe (1838). La même année, il était nommé répétiteur adjoint de géométrie descriptive et, en 1839, examinateur suppléant à l'École polytechnique. Il n'avait que vingt-cinq ans (*).

C'est à partir de son retour à Paris que commence la publication de cette série de Mémoires qui n'a plus cessé de porter au loin la renommée de M. Catalan. Liouville venait de fonder, en 1836, le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, consacré surtout aux parties les plus élevées de la science; en 1842, Gérono et Terquem firent paraître les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, publication d'une nature plus didactique, où se coudoyaient élèves et professeurs, articles élémentaires et mémoires savants. Dès le début de chacun de ces deux nouveaux recueils scientifiques, M. Catalan, lié d'amitié avec leurs rédacteurs, en devint le collaborateur assidu.

(1) NAM., (1), IV, 214-224. La clef des abréviations est au revers du titre.

(*) Ces renseignements biographiques sont empruntés, en partie, au *Liber memorialis* de l'Université de Liège, de M. le professeur Alph. Le Roy.

Digitized by Google

II.

CALCUL DES PROBABILITÉS, COMBINAISONS.

Les premiers volumes du *Journal de Liouville* contiennent de nombreux Mémoires de M. Catalan sur la théorie des combinaisons et le calcul des probabilités. Tous ceux qui ont attaqué ce genre de questions savent combien elles échappent souvent aux méthodes habituelles de l'analyse; sans l'attention la plus soutenue, on risque toujours d'oublier quelques-uns des cas favorables ou défavorables dont il s'agit de faire l'énumération complète.

M. Catalan montre, dans les questions de ce genre, autant de sagacité que d'habileté analytique. Citons quelques-uns de ses travaux : en 1837, la *Solution d'un problème relatif au jeu de rencontre* (2); en 1838, une démonstration ingénieuse et directe de la formule des combinaisons complètes (3); en 1840 et 1842, d'autres questions encore, dont il est difficile de donner une idée, même superficielle, en langage vulgaire (4).

En 1838 et en 1841, il avait traité deux autres problèmes dont il faut faire plus qu'une simple mention, l'un à cause des conséquences analytiques qu'il a su en déduire, l'autre à cause de sa portée théorique.

Au siècle dernier, Segner avait donné une formule, assez incommode, pour trouver de combien de manières un polygone peut se partager en triangles, au moyen de ses diagonales. Euler indiqua immédiatement une formule plus simple pour résoudre la même question. Vers 1838, sur les instances de Terquem, divers géomètres (Lamé, Rodrigues, Binet) essayèrent de démon-

(2) L., (1), II, 469-482. (3) L., (1), III, 111-112; MM., 1-3.
(4) L., (1), V, 264; VII, 511-515.

Digitized by Google

trer, directement ou indirectement, la formule d'Euler. M. Catalan s'occupa aussi de la question et il parvint à une troisième solution, en même temps que Binet, sans recourir, comme celui-ci, à la délicate théorie des fonctions génératrices. Il parvint, en outre, à déduire, des divers résultats obtenus, d'innombrables conséquences analytiques, entre autres sur les fonctions eulériennes (5).

Dans son Mémoire de 1841 (6), M. Catalan fut conduit, par la résolution de divers problèmes, à cette conclusion qui constitue un nouveau principe de probabilité, disait-il : « La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues ». Le principe n'est pas nouveau, comme M. Catalan l'a reconnu; car il se trouve incidemment, sous le nom de *Lemme*, au § 90 de l'ouvrage de Poisson sur la *Probabilité des jugements*. Mais Poisson ne semble pas en avoir saisi l'importance; c'est M. Catalan qui, en 1877 (7) et en 1884 (8), a de nouveau appelé l'attention sur ce principe et en a signalé la fécondité. Pour en faire saisir la portée, il suffira d'en citer une application : supposons que dans un grand pays, comme la France, on vote, dans quarante ou cinquante mille bureaux différents, pour ou contre un candidat à la Présidence de la République. Eh bien, on pourrait supprimer, dans chacune des cinquante mille urnes, la moitié ou les trois quarts des suffrages, pourvu qu'on le fît vraiment au hasard. Le résultat de l'élection serait presque certainement le même que si l'on n'y avait pas touché. Pour les mathématiciens, bien entendu, le nouveau principe présente un tout autre intérêt : dans un grand nombre de cas, il permet de remplacer, par un raisonnement de quelques lignes, des calculs vraiment formidables, comme notre auteur l'a prouvé dans une récente communication académique.

M. Catalan est revenu, maintes fois, à la théorie des combinai-

(5) L., (1), III, 508-516; IV, 91-94, 95-99; VI, 74.
(6) L., (1), VI, 75-80. (7) BB., (2), XLIV, 463-468.
(8) BB., (3), VIII, 72-74; MB., XLVI, 1-16.

Digitized by Google

sons et au calcul des probabilités, dans la suite de sa carrière scientifique. Pour achever ici ce qui regarde cette partie de l'analyse, je citerai, en particulier, ses recherches sur le problème des partis, en 1855 et 1878 (9), deux notes sur la sommation de certains coefficients binomiaux (10), maintes formules combinatoires (1877) (11) et une curieuse lettre sur la loterie de l'Exposition (1880) (12), mais surtout ses *Remarques sur la théorie des moindres carrés* (13). Ce Mémoire a été publié, en 1878, par l'Académie de Belgique; mais une première rédaction, lue en 1874 à l'Association française pour l'avancement des sciences, a été détruite dans l'incendie de l'imprimerie Danel, de Lille, et c'est là une circonstance qu'il est peut-être utile de mentionner au point de vue de la priorité des résultats obtenus dans le Mémoire.

La méthode des moindres carrés est, comme l'on sait, un procédé *conventionnel* de résolution d'équations linéaires, dont les coefficients sont entachés de légères inexactitudes, mais dont le nombre surpasse celui des inconnues. Gauss, Laplace et, après eux, beaucoup d'autres, ont essayé de prouver que cette méthode est la meilleure de toutes celles qui peuvent servir à résoudre le problème proposé. Mais il faut bien avouer que personne n'y a réussi, et tout ce que l'on peut dire en faveur de cette méthode c'est que, entre celles qui accordent la même influence à toutes les équations données, elle est la plus simple. Mais cette méthode la plus simple est-elle d'un usage plus facile? Hélas! non. Les calculs qu'elle exige sont presque toujours extrêmement longs. Ceux-là sont donc bien venus qui parviennent, comme M. Catalan, dans son Mémoire, à y introduire quelques simplifications. Au point de vue pratique, grâce à un emploi judicieux de la théorie des équations linéaires et de celle des déterminants, il a réussi à améliorer considérablement les procédés de formation et de résolution des équations finales auxquelles conduit la méthode.

(9) MM., 72-74; NCM., IV, 8. (10) MM., 193-196; NAM., (1), XX, 147-148, 260-263. (11) MB., XLII, *Notes*, etc., 13-14, 17-18.
(12) NCM., V, 101-102, 195-196. (13) MB., XLIII, 1-42.

Digitized by Google

Mais, en outre, chemin faisant, suivant son habitude, il établit des formules algébriques curieuses et surtout des théorèmes généraux, relatifs à la méthode même. Citons-en deux sur lesquels les rapporteurs de l'Académie, plus compétents que nous, en cette matière, ont appelé spécialement l'attention :

I. *Si la somme des carrés des erreurs véritables est un minimum, la somme des carrés des erreurs virtuelles est aussi un minimum, les erreurs virtuelles étant les quantités qui se trouvent dans les seconds membres des équations auxiliaires, lesquels sont nuls dans le cas des erreurs véritables.*

II. *Si l'on a un système d'équations linéaires en* x, y, z, etc., *et qu'on élimine* x *entre ces équations prises deux à deux de toutes les manières possibles, par la théorie des déterminants, les nouvelles équations obtenues, traitées par la méthode des moindres carrés, donnent pour* y, z, etc., *les mêmes valeurs que les équations primitives, traitées par la même méthode.*

III.

DÉTERMINANTS ET INTÉGRALES MULTIPLES.

Vers l'époque où M. Catalan écrivait ses premiers Mémoires sur le calcul des probabilités, l'Académie de Belgique mit au concours une *question d'analyse algébrique, dont le sujet était laissé au choix du concurrent.* Le jeune professeur de Sainte-Barbe descendit dans la lice avec un Mémoire contenant la Théorie générale de la transformation des intégrales multiples. Ce travail fut couronné en 1840 et publié presque immédiatement (14). En 1846, il fit paraître, dans les *Bulletins* de l'Académie, un Mémoire moins étendu, qui était le complément du premier (15).

Dans ces deux écrits, M. Catalan fait connaître d'abord les principes fondamentaux de la théorie des déterminants, doctrine

(14) MCB., XIV, 1-50. (15) BB., (1), XIII, 534-555.

Digitized by Google

féconde et destinée à un grand avenir, mais alors à peine connue et à peine employée, sauf par Cauchy, Jacobi, Reiss et Lebesgue. Il simplifie considérablement l'exposé des propriétés fondamentales des déterminants, grâce à l'emploi d'une notation ingénieuse, due à Cauchy, paraît-il, mais qui était loin d'être classique, à cette époque. Outre la théorie générale, il fait connaître deux théorèmes nouveaux, l'un qui est la généralisation d'une célèbre identité de Lagrange, l'autre que l'on énonce aujourd'hui de la manière suivante : *Un circulant est égal, en valeur absolue, à la somme de ses éléments, multiplié par le déterminant persymétrique ayant pour éléments les différences successives des éléments du circulant.*

La transformation générale des intégrales multiples est ensuite exposée avec une rare élégance, grâce à l'heureuse idée qu'a eue M. Catalan de laisser sous forme implicite, les relations entre les anciennes variables et les nouvelles.

Les deux Mémoires se terminent par de belles applications à diverses intégrales. L'auteur généralise les coordonnées elliptiques de Lamé et arrive, sur certaines intégrales hyperelliptiques, à des théorèmes très généraux, analogues à ceux de Legendre sur les intégrales elliptiques complètes.

On a dit, dans plus d'un ouvrage classique, que la transformation des intégrales multiples est un problème qui a été résolu par Jacobi avant de l'être par M. Catalan. C'est une erreur : les deux mémoires de Jacobi, sur les déterminants et sur les déterminants fonctionnels, n'ont paru qu'en 1841, dans le tome XXII du *Journal de Crelle*, et c'est là seulement que Jacobi *démontre* les formules générales de la transformation. Que Jacobi connût les formules auparavant, cela ne fait pas de doute. En 1833 (dans le tome XII, page 38 du *Journal de Crelle*), il énonce la formule générale, mais sans démonstration et seulement dans le cas où les anciennes variables sont données explicitement en fonction des nouvelles et, si l'on veut, d'une ou deux variables auxiliaires. Ce qui est vrai, c'est que, dans le Mémoire de 1833, Jacobi traite plusieurs questions spéciales que M. Catalan, sans s'en douter, a reprises, après lui, en 1840.

Digitized by Google

Le Mémoire du jeune lauréat passa tout entier dans le meilleur traité de calcul intégral de l'époque, celui de l'abbé Moigno, écrit, comme l'on sait, sous les yeux de Cauchy, et digne, par les précieux matériaux qui y sont condensés, de cet illustre patronage.

Il en fut de même dans un autre Mémoire du jeune auteur, publié en 1839, dans le *Journal de Liouville* ([16]), et qui contient une méthode spéciale de détermination des intégrales multiples, devenue classique sous le nom de *Méthode de Catalan.* M. Catalan y a été conduit à propos de l'aire de l'ellipsoïde. Cette aire s'exprime par une intégrale double qui représente aussi le volume d'un certain cylindre. Décomposez celui-ci, d'une certaine manière, en couches cylindriques concentriques, et l'intégrale double se transforme en une intégrale simple, réductible aux intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce.

Ce que nous venons d'esquisser pour l'aire de l'ellipsoïde est étendu aux intégrales triples, au moyen d'une interprétation mécanique, puis aux intégrales multiples quelconques, par une voie purement analytique. Les jeunes géomètres, venus après Riemann, ne manquent pas d'exposer maintenant la méthode de M. Catalan, dans ces derniers cas, en employant la terminologie relative à l'espace à quatre, à cinq ou à un plus grand nombre de dimensions. Notre cher et vénéré maître est l'adversaire de cette terminologie; mais il faut bien l'avouer, il a tort, car si elle n'existait pas, il faudrait l'inventer tout exprès pour faire connaître son ingénieuse méthode de transformation des intégrales multiples.

([16]) L., (1), IV, 323-334. Voir aussi MM., 3-8, 8-9, 9-11.

Digitized by Google

IV.

RECHERCHES DIVERSES D'ANALYSE.

M. Catalan a traité, entre 1840 et 1852, un grand nombre de difficiles questions d'analyse, d'un intérêt moins général que celles dont nous venons de nous occuper, mais dont il convient néanmoins de dire quelques mots, avant d'aborder ses recherches sur la théorie des surfaces.

Citons, en premier lieu, ses *Problèmes de calcul intégral*, publiés dans le *Journal de Liouville* ([17]), qui le montrent en pleine possession de la théorie des intégrales elliptiques, cet admirable instrument analytique auquel les efforts persévérants de Legendre étaient enfin parvenus à faire donner droit de cité dans la science. En 1841, M. Catalan trouva l'aire de l'ellipse sphérique, ou la valeur d'un angle solide compris dans un cône du second degré, d'abord, au moyen d'une intégrale elliptique complète de troisième espèce et d'un terme algébrique, puis au moyen des intégrales des deux premières espèces. La même année, il parvint à exprimer le volume de la partie commune à un ellipsoïde et à une sphère concentriques, en fonction de deux intégrales complètes de troisième espèce, de même module, mais de paramètres différents. Vingt-cinq ans plus tard, M. Catalan reviendra à la théorie des intégrales et des fonctions elliptiques, et y fera d'heureuses trouvailles que nous citerons en leur lieu.

Nous devons énumérer, ensuite, dans l'ordre chronologique, divers articles ou mémoires, plus ou moins étendus, sur le calcul intégral : 1° une Note ingénieuse sur une intégrale de Poisson ([18]); 2° la démonstration d'une formule de Tchéby-

([17]) L., (1), VI, 340-344, 419-440. ([18]) L., (1), VI, 81-84.

Digitized by Google

cheff (19); 3° une Note sur l'intégration de certaines équations différentielles simultanées, qui contient une extension, digne d'être signalée, de la méthode de la variation des constantes arbitraires (20); 4° une autre Note, publiée en 1847, dans le *Journal de l'École polytechnique*, sur la théorie des solutions singulières (21). L'auteur indique comment il convient de corriger certaines règles généralement admises pour la recherche de ces solutions. Un élève de l'Université de Liège, auquel je me plais à rendre ici un public hommage, Louis Houtain, devait, quatre ans plus tard, publier, en réponse à une question du concours universitaire, un vrai Traité sur les solutions singulières. Toutes les difficultés analogues à celles que M. Catalan avait soulevées et résolues en 1847, y sont étudiées avec une érudition et une rigueur bien rares à cette époque. Qu'il me soit permis de signaler en cette occasion, puisque je parle devant l'Université de Liège, où Houtain a été Répétiteur, cet ouvrage remarquable auquel il n'a manqué, pour appeler l'attention du monde savant sur son auteur, qu'une publicité moins restreinte; depuis trente ans, il est enfoui dans un recueil plus administratif que scientifique, les *Annales des Universités de Belgique*. 5° A l'extrême limite de l'époque que nous étudions, nous rencontrons encore une nouvelle formule de quadrature approchée, qui porte le nom de M. Catalan (22). Son auteur l'a délaissée depuis longtemps, parce qu'il a découvert qu'elle est contenue implicitement dans une formule du calcul des différences, comme la plupart des formules analogues. Elle ne mérite pas cet abandon, comme nous l'avons prouvé il y a quelques années, car elle est à peu près aussi exacte que celle de Simpson; quand celle-ci ne peut être employée, parce que le nombre des ordonnées de la courbe étudiée est pair, c'est la nouvelle formule qui doit la remplacer.

Enfin, parmi les travaux d'analyse transcendante de M. Catalan, d'avant 1852, se distinguent encore deux Mémoires publiés

(19) L., (1), VIII, 239. (20) NAM., (1), IV, 243-244; MM., 60-61.
(21) EP., XVIII, 31e cahier, 271-276. (22) NAM., X, 412-415.

Digitized by Google

dans le *Journal de Liouville*, et relatifs à une théorie où il devait plus tard briller au premier rang, la théorie des séries. Dans le premier, il établit, d'une manière rigoureuse, le célèbre théorème de Goldbach : *La somme des inverses de la différence, avec l'unité, de tous les nombres entiers qui sont des puissances, est égale à l'unité* ([23]). La méthode de démonstration est ingénieuse et donne à l'auteur la somme de plusieurs séries analogues à celle de Goldbach. C'est à cette époque que M. Catalan a proposé aux géomètres son célèbre théorème empirique : *Zéro et l'unité, huit et neuf, sont les seuls couples de nombres entiers consécutifs qui soient des puissances exactes* ([24]). Dans le second Mémoire ([25]), qui date de 1844, notre auteur obtient, pour tous les cas, les conditions de convergence d'une série que l'on peut appeler le *binôme d'Euler*. Il m'est impossible de donner ici, en langage vulgaire, la moindre idée de la formule démontrée par M. Catalan.

V.

RECHERCHES SUR LES ÉLASSOÏDES, ET AUTRES MÉMOIRES GÉOMÉTRIQUES.

Dans la plupart des travaux de M. Catalan, dont nous avons parlé jusqu'à présent, le but est le plus souvent l'analyse, la géométrie un moyen, quand il en est fait usage. C'est l'inverse dans ceux dont je vais maintenant vous entretenir. Dès ses débuts, le jeune Répétiteur à l'École polytechnique aborde le champ si varié et si attrayant des spéculations géométriques, tantôt d'une manière directe, par la voie intuitive, tantôt en mettant l'analyse au service de la science de l'espace.

La plus remarquable de ses découvertes en ce genre se rapporte aux élassoïdes. Aujourd'hui, on appelle ainsi les surfaces à aire minima, que les travaux d'un des plus illustres savants belges, Joseph Plateau, ont fait connaître dans le monde entier.

([23]) L., (1), VII, 1-12. ([24]) *Journal de Crelle*, XXVII, 192; MM., 40-41.
([25]) L., (1), IX, 161-174.

Digitized by Google

Ce grand physicien, devenu aveugle en 1843, n en résolut pas moins, malgré sa cécité, d'étudier sous toutes ses faces la statique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Il poursuivit son projet avec une ténacité invincible, pendant plus d'un quart de siècle; il imagina, d'année en année, de nouvelles expériences plus ingénieuses les unes que les autres, montrant ainsi, par un exemple mémorable que c'est l'œil intérieur, la lumière de l'esprit, qui révèle au génie les voies secrètes conduisant aux grandes découvertes. C'est dans le cours de ces recherches mémorables qu'il réalisa, sous forme de lames liquides brillamment colorées, un grand nombre de surfaces courbes dont la plupart sont d'une grande complexité au point de vue mathématique. Ces surfaces, que Plateau a montrées à tout le monde, sans jamais les voir lui-même, sont, comme on le sait, des surfaces à aire minima, des élassoïdes. Mais ce que l'on ne sait pas, c'est le rude travail préliminaire que les géomètres ont dû s'imposer pour fournir à Plateau les éléments nécessaires à leur réalisation.

Lagrange, à ses débuts, a donné l'équation aux dérivées partielles des élassoïdes; Monge, leur équation finie, sous diverses formes qui la rendent pratiquement inutile. Meusnier a prouvé qu'ils ont, en chaque point, leurs deux rayons de courbure principaux et de signes contraires; de plus, il a trouvé deux élassoïdes spéciaux, le caténoïde ou alysséide, engendré par la révolution d'une chaînette tournant autour de sa directrice, et la surface de vis à filet carré ou conoïde héliçoïdal. Scherk, un demi-siècle après, en découvrit cinq autres, ou plutôt il en détermina les équations sans les étudier vraiment au point de vue géométrique.

La question en était là quand M. Catalan l'aborda. Du premier coup, par une voie intuitive, qu'il nous a conservée dans ses *Mélanges mathématiques,* il établit ce théorème, soupçonné par Scherk : *le conoïde héliçoïdal est le seul élassoïde réglé* (26). Traduisant en analyse cette idée ingénieuse, il rendit sa démonstra-

(26) MM., 67-68.

Digitized by Google

tion absolument inattaquable ([27]). Depuis, elle a été simplifiée, commentée et généralisée par divers géomètres, Wantzel, Serret, Michel Roberts, Bonnet, Beltrami, Dini. Mais, on le sait, en mathématiques, comme ailleurs, c'est souvent le premier pas qui est le plus difficile. Souvent aussi, rien n'est si aisé que de trouver des généralisations compliquées de théorèmes simples.

M. Catalan, au reste, ne s'en tint pas à ses premiers pas dans cette théorie des élassoïdes. Dans un Mémoire ([28]) sur les surfaces gauches à plan directeur, qu'il publia en même temps que celui que je viens d'analyser, il trouva, outre divers résultats dignes d'intérêt, l'équation finie des lignes de courbure du conoïde héliçoïdal et établit de nouveau le théorème de Dupin, depuis étendu par M. Roberts à tous les élassoïdes, savoir que, sur cette surface, les lignes asymptotiques font un angle de quarante-cinq degrés avec les lignes de courbure.

Douze ans plus tard, M. Catalan reprit de nouveau la question, et, presque en même temps qu'Ossian Bonnet, il résolut un problème qui avait résisté jusqu'alors aux efforts des géomètres : il découvrit des élassoïdes algébriques ([29]). La méthode qui l'a conduit à ces nouveaux résultats, et aussi à une nouvelle forme de l'équation finie des élassoïdes, est digne d'attention. Il soumet l'équation de Lagrange à diverses transformations de variables qui permettent de l'intégrer par une somme de deux fonctions, dont chacune ne dépend plus que d'une seule lettre. Il retrouve ainsi plusieurs surfaces de Scherk, entre autres la première, dont il décrit la forme et la génération, de manière à permettre à Plateau de la réaliser expérimentalement; puis divers élassoïdes nouveaux parmi lesquels le remarquable paraboloïde cycloïdal, qui jouit de la propriété curieuse de contenir une infinité de courbes algébriques, quoique ce soit une surface transcendante.

Je lasserais votre patience longtemps avant d'avoir épuisé mon sujet, si je voulais analyser les autres questions géométriques

([27]) L., (1), VII, 203-211. ([28]) EP., XVII, 29ᵉ cahier, 121-156.
([29]) CR., XLI, 35-38, 274-276, 1019-1023, 1155; EP., XXI, 37ᵉ cah., 129-168.

Digitized by Google

traitées par M. Catalan pendant cette période ou un peu au delà. Je me contenterai de citer, sans entrer dans aucun détail, son remarquable théorème sur la courbure de la transformée plane d'une courbe tracée sur une surface développable ([30]), le Mémoire où il a déterminé les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde ([31]), et enfin une Note sur la projection stéréographique ([32]).

VI.

M. CATALAN ET LE COUP D'ÉTAT DE 1851.

Si je voulais être fidèle, d'une manière absolue, à l'ordre chronologique, je devrais vous signaler ici de nombreux articles sur la théorie des nombres, la géométrie élémentaire, la géométrie analytique, la statique, etc., dont M. Catalan enrichit la collection des *Nouvelles Annales de mathématiques* de son ami Terquem. Je devrais vous parler aussi de ses *Éléments de Géometrie*, publiés en 1843; mais je préfère réunir l'examen de ces écrits, dans quelques instants, à celui des travaux analogues qu'il fit paraître dans la seconde période de sa carrière.

Au moment où nous en sommes arrivés, M. Catalan est dans tout l'éclat de son talent. Auteur de nombreux Mémoires insérés dans les premiers recueils scientifiques de la France, Professeur de mathématiques supérieures au lycée Saint-Louis, Répétiteur de géométrie descriptive à l'École polytechnique, il semblait tout désigné pour occuper, à la première occasion, une des chaires de cette grande École. Hélas! le coup d'État du 2 décembre 1851 vint anéantir les plus légitimes espérances de M. Catalan. Comme tant d'autres fonctionnaires, il se trouva brusquement placé entre la douloureuse alternative de prêter un serment qui répugnait

([30]) CR., XVII, 738-739; MM., 52-53. ([31]) L., (1), XII, 483-490; MM., 288-292. ([32]) L., (1), XIX, 132-138. Voir aussi, CR., LXXVIII, 1040-1041.

Digitized by Google

profondément à sa conscience, ou de briser sa carrière. Il n'hésita pas : d'accord avec la digne compagne qui, depuis quinze ans, s'associait à toutes ses joies et à toutes ses douleurs, il renonça courageusement au brillant avenir qui s'ouvrait devant lui et refusa de prêter serment au nouveau pouvoir. Cauchy, en 1830, avait pris une résolution semblable pour ne point paraître admettre la légitimité du régime issu des journées de juillet. On peut bien, dirons-nous avec le biographe de cet illustre géomètre, défendre ceux qui interprètent d'une manière plus adoucie la portée du serment prêté par un homme de science, aux divers gouvernements qui se succèdent, dans un pays comme la France; mais il n'en faut pas moins réserver un tribut spécial d'estime et d'admiration pour les hommes généreux dont la conscience s'effraie à la vue des transactions sur ce terrain délicat, et qui préfèrent tout sacrifier à ce qu'ils pensent leur devoir.

La néfaste journée du Deux-Décembre, dont ses auteurs mêmes, comme on l'a remarqué, n'osèrent jamais célébrer l'anniversaire, non seulement fit perdre à M. Catalan la position officielle qu'il occupait, mais elle le sépara, plus ou moins, de quelques-uns de ses anciens amis, qui avaient cru devoir se rallier à l'Empire ou du moins le subir. Il est bien difficile de ne pas voir, dans cette séparation, l'une des causes de certains insuccès de notre cher jubilaire.

A partir de 1852, M. Catalan fut chargé, en tout ou en partie, de l'enseignement préparatoire à l'École polytechnique, dans les institutions Jauffret, Barbet, Lesage, etc. C'est pendant cette période de sa vie qu'il publia les admirables Manuels qui l'ont fait connaître du monde des Écoles comme ses Mémoires l'ont fait connaître du monde savant. Ces Manuels, avec la *Géométrie* qui avait paru en 1843, forment un cours complet de mathématiques, depuis les premiers éléments jusqu'aux débuts du calcul différentiel et du calcul intégral. Qu'il nous soit permis d'en dire quelques mots, en y réunissant le *Cours d'analyse de l'Université de Liège*, publié en 1870.

Digitized by Google

VII.

OUVRAGES DIDACTIQUES DE M. CATALAN.

Les divers Manuels de M. Catalan se distinguent, à première vue, de la foule des écrits analogues, par l'élégance, la clarté, la concision du style et par l'heureux enchaînement des propositions (*). Sa méthode d'exposition a aussi quelque chose de caractéristique, surtout dans le *Traité élémentaire des séries,* le *Manuel des candidats à l'École polytechnique* et le *Cours d'analyse.* En général, il préfère élucider les principes fondamentaux de chaque théorie, moins par des explications abstraites que par de petites remarques détachées qui font pénétrer le lecteur au fond de la question traitée; il subdivise si habilement les difficultés qu'elles semblent peu à peu s'évanouir. La plupart des Manuels de M. Catalan contiennent d'ailleurs des applications nombreuses qui aident beaucoup à l'intelligence complète des théories proprement dites; puis des questions graduées et bien choisies. Le plus souvent ce sont de véritables questions qui exigent, pour être résolues, quelque esprit d'invention; il y en a même qui supposent déjà, chez le lecteur, une grande habileté dans le maniement du raisonnement et de l'analyse.

Dans plusieurs de ces Manuels, outre les qualités de la forme, outre l'excellente disposition des matières, il y a des vues mathématiques, nouvelles à l'époque de leur publication, et qu'il importe d'autant plus de signaler qu'elles sont devenues ou tendent à devenir classiques, sans que personne songe à en faire honneur à M. Catalan.

Les *Éléments de Géométrie* parurent en 1843. Le plan de

(*) Voir, à la fin de ce discours, la liste des ouvrages publiés par M. Catalan, ailleurs que dans des Recueils scientifiques.

Digitized by Google

l'ouvrage est le même que celui de la *Géométrie de Legendre*. Comme Legendre, mais d'une manière plus systématique encore, l'auteur introduit partout, à la place des relations entre les grandeurs, les relations entre les nombres qui les mesurent; et, en conséquence, plus encore que son illustre prédécesseur, il ose recourir à l'Algèbre. C'est, on le voit, l'antithèse de la méthode euclidienne. De plus, M. Catalan améliore, en une foule de points de détail, l'enseignement traditionnel de la géométrie; il substitue partout, par exemple, la méthode des limites aux méthodes plus lentes des anciens et de Legendre. Mais ce n'est pas là ce qui est vraiment original dans son ouvrage. Ce qui le caractérise essentiellement, au point de vue philosophique, c'est la manière dont sont définies les longueurs des lignes courbes, les aires des surfaces courbes ou des surfaces planes terminées par des courbes, et les volumes des corps ronds. Pour lui, « l'aire d'une figure plane terminée par une courbe est la limite des aires que l'on obtient, en inscrivant à cette courbe une série de polygones convexes dont les côtés diminuent indéfiniment, de manière à devenir moindres que toute grandeur donnée ». Cette limite est unique d'ailleurs, d'après un théorème de Newton, retrouvé par Cauchy. L'auteur définit de même les longueurs des lignes courbes, les aires des surfaces courbes, etc.

Cette idée nouvelle de M. Catalan scandalisa ses collègues de 1843. L'un d'eux disait, à cette époque, en parlant de la *Géométrie* : « *Peut-être trouvera-t-on que l'auteur a été trop loin en introduisant l'idée de limite dans les définitions mêmes* (33) ». L'impression générale fut que, en effet, il avait été trop loin. Sous l'influence des écrits de Duhamel, la manière de voir de M. Catalan ne fut admise qu'à moitié, c'est-à-dire pour les longueurs et les aires courbes, mais non pour les aires planes et les volumes. Mais à la fin, la logique a triomphé, grâce surtout à la publication de la seconde édition des *Éléments de Géométrie* en 1866, qui a révélé à beaucoup de professeurs les vues complètes de M. Catalan sur ce point. Aujourd'hui, tout le

(33) Thibault, NAM., (1), III, 383-384.

Digitized by Google

monde admet qu'il faut, dans l'exposition de la géométrie, ou bien revenir à la méthode euclidienne, ou bien y employer systématiquement l'arithmétique et l'algèbre, et, dès lors, introduire la notion de limite dans les définitions, même pour l'aire du triangle et le volume de la pyramide.

Mais cela suppose, dira-t-on, toute une théorie des préliminaires des nombres incommensurables. Sans doute. Et, précisément, au point de vue philosophique, le mérite principal de son petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre,* c'est d'avoir exposé cette théorie, comme il le fallait, il y a trente ans, à une époque où personne n'y songeait. Dans ce petit ouvrage, qu'il faut compléter par les premiers chapitres du *Manuel des candidats à l'École polytechnique,* M. Catalan définit d'abord, avec Cauchy, le nombre incommensurable, comme la limite d'une suite de nombres commensurables; il s'aide, auxiliairement au moins, d'une représentation géométrique, pour faire saisir l'existence de cette limite. Ensuite (et c'est ce qu'il y a d'original dans sa manière de voir), il transporte de nouveau l'idée de limite dans la définition d'un produit de deux incommensurables en disant que c'est la limite du produit des nombres commensurables dont les facteurs sont les limites. Récemment, Heine, Dedekind, G. Cantor, Lipschitz et, après eux, beaucoup d'autres, ont développé des idées semblables, sans se douter, semble-t-il, que notre collègue les avaient devancés dans son Arithmétique.

Nous devons signaler, absolument dans le même ordre d'idées, la manière dont M. Catalan a défini les opérations sur les quantités négatives. L'un des premiers encore, le premier peut-être, il a remarqué, comme pour les incommensurables, qu'il faut prendre pour définition les égalités, qu'il y a un siècle, on voulait démontrer, parce que l'on posait mal la question. De cette manière s'évanouissent toutes les difficultés qui tiennent à ce point de doctrine. Sous une forme ou sous une autre, c'est ainsi que procèdent maintenant tous les auteurs au courant de la question. Les uns, toutefois, énoncent et les autres sous-entendent cette remarque essentielle : les conventions relatives aux quantités négatives ne sont pas arbitraires; bien plutôt elles

Digitized by Google

s'imposent, si l'on veut que les règles du calcul algébrique soient générales.

Je n'abuserai pas de votre patience, en vous parlant aussi longuement des autres ouvrages didactiques. Je n'en dirai qu'un mot.

Les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, dont six éditions ont paru depuis 1852, constituent le meilleur recueil de ce genre. Il est impossible, croyons-nous, de réunir plus de matériaux en moins de pages, tout en restant toujours clair.

Le *Traité élémentaire de géométrie descriptive* est classique en France et en Belgique. Les notions fondamentales sur les surfaces réglées y sont exposées avec plus de soin que dans maint ouvrage plus complet.

Dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, nous signalerons l'*Algèbre*, où, en particulier, toutes les questions relatives à la résolution numérique des équations sont traitées d'une manière à la fois simple et complète, grâce à un judicieux usage de l'intuition géométrique ; la *Géométrie analytique*, résumé sobre, concis, admirablement clair, d'un cours lithographié plus étendu. C'est dans ce cours que M. Catalan a démontré plusieurs théorèmes remarquables, apparentés avec ceux de Pascal et de Brianchon, dont M. Folie, qui les a trouvés de son côté, a fait ressortir l'importance, il y a quelques années ([34]).

Le temps et la compétence me manquent à la fois pour vous parler des autres manuels de M. Catalan, la *Mécanique* et la *Cosmographie*. Je passerai rapidement aussi sur le *Cours d'analyse*. La seconde édition de cet ouvrage, plus encore que la première, à cause du chapitre additionnel sur les lignes à double courbure, est une excellente introduction aux Traités plus étendus ; introduction théorique et pratique à la fois, et très complète, sous un petit volume. On y rencontre, à chaque page, des points de détail exposés d'une manière personnelle, et parfois d'heureuses trouvailles, comme le procédé d'intégration des fractions rationnelles et la démonstration si simple de

([34]) NAM., (1), XI, 173-174 ; BB., (2), XLVI, 946-949, 379-381.

Digitized by Google

l'important théorème : *une fonction continue dont la dérivée est nulle est constante.*

Enfin, je ne puis pas oublier le *Traité élémentaire des séries,* opuscule de cent trente-deux pages qui renferme, comme l'auteur le dit avec raison, beaucoup plus de choses qu'on ne serait tenté de le croire au premier abord. Dans aucune partie de l'analyse, en effet, M. Catalan n'est plus dans son propre domaine que dans la théorie des séries. C'est un *sériéiste,* comme l'appelait Terquem; il connaît les séries une à une, comme nous connaissons les propositions élémentaires de la Géométrie. Dans son livre, il expose les vrais principes de la théorie de ces expressions remarquables, sur lesquelles le XVIII[e] siècle avait accumulé tant de nuages; il les expose avec une telle profusion d'exemples et d'applications que le lecteur en est ébloui et presque épouvanté. Chemin faisant, il relève les erreurs et les contradictions des esprits attardés qui osent encore traiter les séries divergentes ou indéterminées, de la même manière que si elles étaient convergentes.

Partout, en un mot, il se souvient de cette vérité si importante et qu'il a d'ailleurs inculquée dans tous ses autres ouvrages ([55]) : l'infini, en mathématiques, n'est qu'une manière de parler; en réalité, il s'agit de limite, quand on parle de l'infini (Gauss).

Le *Traité élémentaire des séries* n'a pas encore été remplacé, et il reste, pour le savant comme pour l'étudiant, le manuel classique sur la matière, malgré quelques petites imperfections, presque inévitables à l'époque où il a été écrit.

([55]) Sur les séries, voir encore, NAM., (1), III, 570-572; XVIII, 195-198; (2), XIII, 60.

Digitized by Google

VIII.

RECHERCHES DIVERSES DE M. CATALAN, JUSQU'A SON ARRIVÉE EN BELGIQUE.

L'ouvrage dont nous venons de parler avait été préparé par de nombreux articles publiés dans divers Recueils, par exemple, dans les *Comptes rendus* de l'Académie de Paris, sur *la série harmonique* (36) et sur les cas limites de la *formule du binôme* (37).

Un *Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies*, présenté en 1865 à l'Académie de Bruxelles, en est le complément (38). C'est là que, par une méthode ingénieuse, M. Catalan calcule la célèbre constante G, au moyen de laquelle il a exprimé tant d'intégrales définies, dans un travail publié par l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1883. Il est impossible de donner une idée de ces recherches sans recourir aux hiéroglyphes de l'algèbre, et je dois me contenter de cette mention rapide.

En 1859, M. Catalan publia, dans les *Annales de Tortolini*, ses premières recherches sur les Nombres de Bernoulli, sujet qu'il n'a plus abandonné depuis et sur lequel il est arrivé à divers résultats remarquables (39). Un de ses élèves devrait les réunir et les résumer pour le public savant.

Trois ans plus tard, une étude curieuse sur un article mal

(36) CR., XLIII, 626-630; MM., 164-167; MB., XLII, *Notes*, 22-23.

(37) CR., XLV, 641-644 (inséré en note à la fin du *Cours d'Analyse* de Sturm, publié par Prouhet); NCM., I (1re édition), 121-125.

(38) MCB., XXXIII, 1-50; CR., LIX, 618-620. Voir aussi MM., 223-231.

(39) Reproduite MM., 115-120; voir aussi 110-115, 121-127, 127-132, 313-334; NAM., (1), XV, 230-235; CR., LIV, 1030-1033, 1059-1062; LVI, 415-416; LVIII, 902-903, 1105-1108; LXXXI, 441-443; MB., XXXVII, 1-19; XLII, *Notes*, etc., 15-16, 26-28; NCM., IV, 119.

Digitized by Google

rédigé du Code civil, l'article 737 (40), le conduisit à des transformations de séries, dont il déduisit d'innombrables conséquences dans un Mémoire publié, en 1870, par l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei* (41).

S'il était possible d'être complet, il faudrait encore citer diverses Notes insérées aux *Comptes rendus*, sur les équations du troisième degré (42), sur la détermination du nombre des racines imaginaires des équations (43), sur une application du binôme aux intégrales eulériennes (44); puis dans d'autres recueils, sur la théorie des roulettes (45).

En 1863, M. Catalan présenta à l'Académie de Belgique un Mémoire *Sur les lignes de courbure du lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante* (46). Il résout cette question dans le cas particulier où les droites sont perpendiculaires; mais, en même temps, il traite divers problèmes relatifs aux lignes de courbure, aux surfaces-canaux, aux surfaces parallèles et aux systèmes triples orthogonaux. C'est là qu'il a exposé, sur ce dernier sujet, des vues nouvelles qui ont donné naissance, plus tard, à une Note publiée dans les *Comptes rendus* (47) et renfermant des résultats très dignes d'attention, mais peut-être difficiles à établir avec une entière rigueur.

J'ai hâte d'arriver à un Mémoire plus important qui est certainement, avec le travail sur les Élassoïdes de 1855, le plus beau de ceux que l'auteur ait écrits pendant la seconde période de sa vie : je veux parler de son *Mémoire sur les polyèdres* (48), destiné, dès le premier jour, à devenir classique, comme ses recherches de 1839 sur la transformation des intégrales multiples. L'auteur a raconté lui-même, dans une brochure un peu vive peut-être, intitulée : *Histoire d'un concours*, l'origine et les destinées de ce Mémoire.

(40) MM., 231-234; NAM., (2), II, 107-111.

(41) AP., XXIII, 11 pages in-4°. (42) MM., 202-205; CR., LIV, 659-660.

(43) CR., XLVII, 797-800. (44) CR., XLVII, 545-549; MM., 150-162.

(45) NAM., (1), XV, 102-108; MM., 49-51, 181-184; BB., (2), XXVII, 144-145. (46) MCB., XXXII, 1-34. (47) CR., LXXIX, 28-32.

(48) EP., XXIV, 41e cahier, 1-71; MM., 206-208.

Digitized by Google

En 1861, l'Académie des sciences de Paris mit au concours une question ainsi formulée : *Perfectionner, en quelque point important, la théorie géométrique des polyèdres.* Pendant plus d'un an, M. Catalan ne trouva rien sur cette question qui semblait épuisée après les travaux de Cauchy, de Poinsot et de M. Bertrand. Mais enfin, un certain jour, un commencement de lumière se fit, et, peu à peu, il imagina la construction d'une sorte d'échiquier dont les pièces, disposées d'après certaines règles, correspondent aux éléments du polyèdre supposé; si toutes ces pièces ne peuvent être placées, le polyèdre n'existe pas. Cette ingénieuse découverte ramenait la théorie de la possibilité des polyèdres à l'analyse indéterminée du premier degré et à un problème analogue à celui du Cavalier, du Solitaire, etc.

M. Catalan expose, dans son Mémoire, cette réduction de la question, en la faisant précéder d'une discussion originale et très complète des conséquences de la célèbre formule de Descartes et d'Euler, sur la relation qui existe entre les nombres d'arêtes, de faces et de sommets d'un polyèdre. Nulle part, croyons-nous, il n'a été plus clair, plus simple et plus concis que dans cette première partie du travail que nous analysons.

La seconde est une monographie des polyèdres semi-réguliers, c'est-à-dire ayant des faces régulières et des angles égaux ou des angles réguliers et des faces égales. Pappus a fait connaître sommairement, et Képler a décrit, en quelques pages, treize polyèdres semi-réguliers du premier genre dont l'invention remonte à Archimède (*Harmonia mundi*, II, 28; *Œuvres*, V, 123-126). Lidonne (*Tables de tous les diviseurs des Nombres, calculés depuis un jusqu'à cent deux mille.* Paris, in-8°, 1808; voir p. 183-218) en fit aussi un catalogue assez informe, en ajoutant treize fois, aux données de Pappus et de Képler, cette proposition fausse : *Les polyèdres d'Archimède sont à la fois inscriptibles et circonscriptibles à une sphère* (*). Enfin, d'après Baltzer, treize polyèdres du second genre, conjugués des précédents, avaient été signalés, en 1852, dans la *Trigonométrie* de J.-H.-T. Müller.

(*) Il affirme aussi qu'il ne peut y avoir plus de treize polyèdres semi-réguliers (p. 186).

Digitized by Google

M. Catalan traite la question d'une manière autrement complète; il prouve qu'il y a, non pas treize, mais quinze polyèdres du premier genre et pas davantage; que les deux nouveaux ont une infinité de formes possibles; qu'ils sont tous inscriptibles. Il calcule tous les éléments de ces polyèdres qu'il représente dans des épures admirablement soignées. Il démontre, de même, l'existence de quinze polyèdres semi-réguliers, du second genre, lesquels sont circonscriptibles à une sphère et conjugués des premiers; il en donne aussi la représentation géométrique sur deux plans de projection.

Tout, dans ce Mémoire, est remarquable et vraiment définitif sur les questions traitées : les conséquences nombreuses du théorème de Descartes et d'Euler, la représentation, sur un échiquier, des solides à facettes, la théorie des polyèdres semi-réguliers. Il n'obtint néanmoins pas le prix; le Rapporteur ne semble pas avoir fait attention à la première partie du Mémoire et il a cru, à tort, que les travaux antérieurs sur les solides d'Archimède avaient une valeur scientifique sérieuse. Heureusement le Mémoire put être publié dans le *Journal de l'École polytechnique*.

IX.

NOMINATION DE M. CATALAN A LIÉGE.

Quelque élevé que soit l'enseignement des grandes écoles préparatoires de Paris, il était évident que M. Catalan, auteur de tant de beaux Mémoires d'analyse et de géométrie, y occupait une position inférieure à son mérite. Depuis longtemps déjà, sa place était marquée dans l'enseignement supérieur. Ce fut l'Université de Liège qui eut à la fois l'honneur et la bonne fortune de lui offrir une chaire digne de son talent; cette chaire était celle que venait de quitter M. Schaar, ce maître éminent dont je suis heureux de rappeler le souvenir en ce jour, moi son disciple et son successeur à Gand. M. Catalan fut nommé Professeur ordinaire à la Faculté des sciences de Liège le 1er mars 1865

Digitized by Google

et chargé des cours de calcul différentiel et de calcul intégral, d'analyse supérieure et de calcul des probabilités.

Pendant les vingt années qu'il a occupé cette chaire, il a maintenu l'enseignement de l'analyse à la hauteur où l'avait élevé son prédécesseur. Il a fait plus : il en a agrandi le cadre, en introduisant, chaque année, dans ses cours du doctorat, les résultats de ses dernières recherches. Comme à Paris, il s'est montré professeur distingué : là-bas, il avait préparé aux études d'analyse et de géométrie transcendantes, les Hermite, les Mannheim et tant d'autres qui occupent maintenant les positions les plus élevées dans la science; il en avait deviné et fait éclore le talent mathématique. Ici à Liège, il a guidé dans leurs études d'innombrables élèves de l'École des Mines et de la Faculté des sciences; quelques-uns, plus spécialement ses disciples, sont devenus ses collègues et se sont déjà fait connaître par des publications remarquables. Leur légitime succès, dans le monde savant, a son origine première dans l'enseignement de M. Catalan et en est le plus bel éloge.

La même année 1865, notre cher collègue fut nommé Associé de l'Académie de Bruxelles, dont il avait été le lauréat, un quart de siècle auparavant. Depuis cette époque, il n'a cessé d'enrichir de Mémoires, de notes et de rapports les recueils de notre premier corps savant. La liste seule de ses publications académiques occupe sept ou huit pages de la Table des *Bulletins*, en petit texte. D'autres sociétés savantes s'empressèrent de l'appeler dans leur sein : la Société royale des sciences de Liège, l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, à qui il a envoyé de beaux travaux sur les fonctions elliptiques et l'Arithmétique supérieure; la Société mathématique d'Amsterdam, qui l'a élu membre d'honneur, il y a quelques années; enfin, plus récemment, l'Académie de Saint-Pétersbourg, où il a trouvé dans l'illustre mathématicien qui préside à cette solennité (*) un digne appréciateur de ses travaux (**).

(*) M. Tchébycheff, venu de Saint-Pétersbourg à Liège, pour la remise du portrait offert à M Catalan par ses élèves et ses amis.

(**) M. Catalan a été nommé associé de l'Académie de Turin, peu après la cérémonie du 7 décembre 1884.

Digitized by Google

Comme on le voit, l'heure de la réparation a sonné pour M. Catalan, du moment où il a foulé le sol de sa première patrie. Et pourquoi ne le dirais-je pas? il y a trouvé, non seulement la position que son mérite lui donnait le droit d'espérer, mais aussi des institutions politiques plus en harmonie avec ses aspirations que celles de la France impériale.

X.

TRAVAUX DE M. CATALAN, DEPUIS 1865.

Pour terminer ma tâche, Messieurs, il me reste à vous entretenir des travaux de M. Catalan pendant les vingt dernières années. A aucune époque de sa vie, il n'a pu se livrer plus complètement à ses recherches de prédilection que depuis sa nomination à Liège. Plus encore qu'auparavant, il a su donner carrière à son imagination inventive en analyse et en géométrie. Mais, à cause de cela même, ses travaux sont d'une nature plus spéciale que ceux dont j'ai parlé antérieurement; d'ailleurs, la plupart ont été publiés en Belgique et sont sans doute connus de ses élèves et de ses amis. Je me contenterai donc d'en esquisser, à grands traits, l'objet et les résultats, en suivant plutôt l'ordre logique que l'ordre chronologique. Je vous parlerai donc, successivement, de ses recherches en théorie des nombres, en analyse et en géométrie.

Tout le monde connaît la partie élémentaire de la théorie des nombres, l'arithmétique usuelle; mais on ignore généralement qu'il existe une arithmétique supérieure dont l'étude présente plus de difficultés que n'importe quelle autre partie des mathématiques, parce que le géomètre n'y est plus guidé, comme en analyse, en géométrie et en mécanique, par la loi de continuité. Les nombres sont des entités discrètes, séparées; ceux qui sont

Digitized by Google

voisins les uns des autres dans leur suite naturelle ont, presque toujours, des propriétés radicalement distinctes.

M. Catalan s'est occupé, toute sa vie, de questions relatives à la théorie des nombres, comme en témoignent les articles publiés dans le *Journal de Liouville*, les *Nouvelles Annales de mathématiques*, la *Nouvelle Correspondance mathématique*, sur l'analyse indéterminée ([49]), les fractions continues ([50]), la partition des nombres ([51]), sur le dernier théorème de Fermat ([52]), sur une formule de Tchébycheff ([53]), etc., etc. Mais, c'est surtout dans ces dernières années qu'il a écrit, sur la matière, de grands Mémoires spéciaux. Je citerai, en particulier, le *Mémoire sur quelques décompositions en carrés* ([54]) et les *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* ([55]), qui ont paru en 1884.

Le premier contient d'innombrables théorèmes déduits, pour la plupart, d'identités très simples et relatifs à la décomposition d'expressions diverses en une somme de carrés. Je citerai, par exemple, celui-ci : toute puissance entière d'une somme de trois carrés est aussi une somme de trois carrés. Les arithméticiens remarqueront surtout, dans ce travail, ce qui se rapporte à un théorème célèbre de Gauss. M. Catalan établit qu'un des polynômes considérés par le grand géomètre de Gœttingue est à la fois décomposable en quatre et en cinq carrés.

Les *Notes sur les fractions continues* échappent, par leur nature même, à toute analyse. Nous devons signaler toutefois les développements nouveaux obtenus par l'auteur pour la racine carrée d'un nombre; puis, les résultats relatifs à diverses séries elliptiques, suite et complément d'un Mémoire dont nous parlerons plus bas.

([49]) NAM., (1), III, 97-101; MM., 21-23, 38-40, 99-103, 248-251; NAM., (2), VI, 63-67, 276-278. ([50]) NAM., (1), IV, 126-130, 257-259, 405-409; VIII, 154-202; MM., 75-98. ([51]) MM., 16-18, 18-21, 62-64, 305-312; NAM., (2), VIII, 407-414. ([52]) MM., 196-202. ([53]) NCM., IV, 308-313.
([54]) AP., XXXIV, 3 p. in-4°, XXXV, 14 p. in-4°, XXXVII, 66 p. in-4°.
([55]) MB., XLV, 1-82. Voir aussi BB., (3), V, 612-618.

Digitized by Google

La seconde branche des mathématiques pures, l'analyse ou théorie des fonctions, comprend, d'abord, une partie relativement élémentaire, le calcul différentiel et le calcul intégral, tels qu'ils sont enseignés dans nos grandes écoles techniques; puis une partie supérieure, qui offre aux géomètres un champ d'études, pour ainsi dire, indéfini. Jusqu'à présent, ils ont exploré principalement trois provinces de cet immense domaine, la théorie des fonctions eulériennes, celle des fonctions sphériques ou polynômes de Legendre, enfin celle des fonctions elliptiques, hyperelliptiques, abéliennes, etc. M. Catalan a laissé sa trace dans chacune d'elles par des œuvres remarquables.

Sur les intégrales eulériennes, indépendamment de Notes publiées autrefois dans les *Comptes rendus* et ailleurs, il a fait paraître, depuis dix ans, trois Mémoires in-4°. Le premier est intitulé : *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet* (56) et se trouve dans le *Journal de Liouville* de 1875; le deuxième est inséré dans les Mémoires de notre Académie, pour 1877 (57); le troisième enfin a eu l'honneur d'être imprimé dans ceux de l'Académie de Saint-Pétersbourg (58). C'est le travail sur la constante G, dont j'ai parlé plus haut. Dans tous les trois, notre savant Collègue fait connaître la valeur ou les relations mutuelles d'une foule de séries et d'intégrales définies nouvelles ou anciennes; mais, encore une fois, il est impossible d'en donner une idée, à moins de recourir aux formules mathématiques.

Les nombreux écrits de notre cher jubilaire sur les fonctions X_n de Legendre et d'autres polynômes apparentés sont tout aussi rebelles que les précédents à une analyse en langage ordinaire. Les recherches de M. Catalan, sur ce sujet, datent de 1876 seulement. C'est alors qu'il débute dans l'analyse des fonctions sphériques par une courte Note lue au congrès de Clermont-Ferrand, devant l'Association française pour l'avancement des sciences (59). Depuis cette époque, il n'a cessé d'exploiter,

(56) L., (3), I, 209-240; CR., LXXVII, 198-201. (57) MB., XLII, 1-20.
(58) *Mém. de Saint-Pétersbourg*, (7), XXXI, 51 pages in-4°.
(59) *Association française*, etc., 1876, pp. 68-74.

Digitized by Google

avec une ardeur toute juvénile, le nouveau filon qu'il avait découvert ([60]). Son dernier Mémoire sur la matière est de 1882 et a plus de cent pages in-4°. Il a fait regretter, au célèbre spécialiste de Halle, le professeur Heine, d'avoir publié la seconde édition de son *Handbuch der Kugelfunctionen*, avant d'avoir pu le consulter.

Dans la théorie des fonctions elliptiques, M. Catalan n'a pas été moins heureux et moins fécond. Dans une Note publiée par notre Académie, en 1870, il a coordonné et complété ses recherches antérieures sur l'aire de l'ellipsoïde([61]). Dans deux Mémoires, qui ont paru à Rome, en 1867 et en 1873 ([62]), il a réduit, au dernier degré de simplicité, la démonstration du théorème de Legendre sur la relation entre les intégrales elliptiques des deux premières espèces, en prouvant qu'elle équivaut à la décomposition de la sphère, en rectangles infiniment petits, par des coniques sphériques orthogonales; puis il établit d'autres relations semblables, et commente ou corrige divers résultats de Legendre sur les équations modulaires, les intégrales de troisième espèce, etc.

Trois autres notes sur l'addition des fonctions elliptiques, la transformation de Landen et l'interprétation géométrique que l'on en peut donner, sont aussi très intéressantes ([63]). C'est dans la première que M. Catalan a établi que l'équation différentielle elliptique peut se ramener à une équation de Clairaut. Cette réduction a paru si ingénieuse à l'illustre Cayley, qu'il l'expose dès les premières pages de son *Traité des fonctions elliptiques*. Mais il l'attribue à M. Walton, qui ne l'a publiée qu'un an après notre savant Collègue.

Mais le plus beau travail d'analyse de M. Catalan sur les fonctions elliptiques et probablement le plus remarquable de tous les Mémoires qu'il ait écrits depuis vingt ans, ce sont ses *Recherches*

([60]) MB., XLII, *Notes*, 3-10; M8B., XXXI, 1-64; MB., XLIII, 1-10; 1-40; 1-9 (trois mémoires); NCM, VI, 396-402; MB., XLIV, 1-104.

([61]) BB., (2), XXX, 97-104. ([62]) AP., XX, 171-180; XXV, 15 p. in-8°.

([63]) BB., (2), XXVII, 145-151; CR., LXXVIII, 1479-1481; MB., XLII, *Notes*, 29-32; MB., XLV, 1-20.

Digitized by Google

sur quelques produits infinis (64). Tous ceux qui ont quelque teinture d'analyse supérieure connaissent, au moins de nom, les *Fundamenta* de Jacobi. La seconde partie de cet ouvrage immortel contient les développements en série et en produits infinis des fonctions *thêta* et d'une foule de quantités qui en dépendent. Le rapprochement de divers développements obtenus conduit Jacobi à des théorèmes d'arithmétique supérieure, sans aucune connexion apparente avec la théorie des fonctions elliptiques, celui-ci, par exemple : tout nombre entier est un carré, ou la somme de deux, trois ou quatre carrés.

C'est dans cette région, d'abord difficile, où la haute analyse et l'arithmétique supérieure se touchent, que M. Catalan a pénétré et d'où il a rapporté une ample moisson de faits nouveaux. L'idée-mère qui lui a servi dans ses *Recherches sur quelques produits infinis* est d'une simplicité extrême. Il décompose les expressions à étudier en un produit de plusieurs expressions de même genre. Les facteurs et leur produit étant transformés en séries, il obtient un produit de plusieurs suites infinies égal à une autre suite infinie, résultat d'où découlent tout naturellement une foule d'identités. A chacune d'elles correspond un théorème d'arithmétique supérieure. En voici un comme spécimen : Quand un nombre n'est pas pentagonal, il admet autant de décompositions en un nombre pair qu'en un nombre impair de parties inégales. Le Mémoire contient plus de quatre cents formules numérotées, plus ou moins importantes, et les Mémoires ultérieurs de l'auteur en renferment peut-être encore une centaine; car il est revenu à plusieurs reprises sur ce sujet, pour ainsi dire, inépuisable, entre autres dans son écrit sur la constante d'Euler.

Tels sont, avec les Mémoires sur le calcul des probabilités cités au début de cette étude, les principaux écrits de M. Catalan sur l'analyse et la théorie des nombres, pendant la période qui nous occupe. L'auteur des belles recherches sur les élassoïdes et

(64) MB., XL, 1-127; comp. MM., 186-187; NAM., (2), XIII, 518-523.

Digitized by Google

les polyèdres semi-réguliers ne pouvaient pas non plus délaisser la géométrie. Aussi ne l'a-t-il pas fait. Il est revenu, encore une fois, à la théorie générale des surfaces réglées et des courbes gauches dans trois brochures (65) qui, réunies avec ses écrits antérieurs analogues, forment, pour ainsi dire, un traité sur la matière, puis il a publié un remarquable Mémoire sur la surface des ondes et la transformation apsidale, que je vous demande encore la permission d'analyser brièvement (66).

Les méthodes générales de transformation des figures sont l'une des conquêtes les plus fécondes de la géométrie, au XIX^{e} siècle. Pour en donner une idée, prenons un exemple : partons d'une figure éminemment simple, la sphère. Si on l'allonge d'une manière uniforme dans un sens unique, elle devient un ellipsoïde de révolution; celui-ci, à son tour, agrandi dans un sens perpendiculaire au premier, par un procédé analogue, se transforme en un ellipsoïde quelconque. Soumettez celui-ci à la transformation apsidale, étudiée avec tant de soin par M. Catalan, il devient cette surface des ondes imaginée par Huygens pour expliquer, par la théorie cartésienne de la lumière, les phénomènes de la double réfraction. Chaque propriété de la surface primitive se répercute dans la surface transformée et s'y dessine, pour ainsi dire, en traits plus marqués. Il semble que l'on ait transporté, en géométrie, les ingénieuses théories du transformisme idéaliste des biologistes modernes. Tout ce qui était confondu, indistinct, non différencié dans la sphère, apparaît dans l'ellipsoïde et la surface des ondes avec sa fonction propre. Tous les points de la sphère sont identiques; sur l'ellipsoïde, il y a déjà dix points extraordinaires, les six sommets et les quatre points sphériques. Rien ne trahit ceux-ci aux yeux de l'observateur vulgaire; mais ils apparaissent, aux géomètres, comme une singularité naissante. Dans la surface des ondes, ils sont remplacés par quatre points singuliers, où la surface n'a

(65) MSB., XVIII, 1-80; XXIV, 1-48; *Mém. de la Soc. royale des sciences de Liège*, (2), VI, 1-79.

(66) MB., XXXVIII, 1-64; *Association française*, etc., 1878, 56-62.

Digitized by Google

pas de plan tangent, mais une surface conique tangente. A leurs propriétés géométriques correspond l'un des phénomènes les plus extraordinaires de l'optique, la réfraction conique, que le génie de Hamilton a découverte, dans ses formules, avant que l'expérience l'eût révélée aux physiciens.

Les propriétés de la surface des ondes que je viens d'esquisser sont connues depuis longtemps. M. Catalan en a trouvé ou retrouvé une foule d'autres, de la manière la plus naturelle, au moyen de la transformation apsidale. Dans cette transformation les points correspondants sont à la même distance d'un pôle fixe; le plan de ces trois points contient d'ailleurs les normales aux deux surfaces, et ces normales sont perpendiculaires entre elles. Notre éminent Collègue a d'ailleurs étudié les propriétés générales de la transformation apsidale et l'a appliquée, avec son habileté ordinaire, aux surfaces parallèles et aux surfaces podaires ou inverses l'une de l'autre. Son Mémoire est, à la fois, une étude approfondie sur la plus célèbre des surfaces après les quadriques et une monographie d'une très intéressante méthode de transformation des figures.

Cher et vénéré maître,

Je termine ici l'analyse de vos savantes recherches. Je crains bien d'avoir été trop long, au gré de l'impatience de vos élèves et de vos amis, qui ont hâte de vous acclamer et de vous offrir un témoignage de leur affection et de leur reconnaissance, plus durable que mes faibles paroles. Et cependant, vous le savez, à quelque rude épreuve que j'aie mis votre modestie, en parlant si longtemps de vos écrits en votre présence, j'ai été bien incomplet encore. J'ai passé sous silence plus de cent Notes diverses insérées dans vos précieux *Mélanges mathématiques*, dans les *Nouvelles Annales* et dans la *Nouvelle Correspondance*, cet excellent recueil que vous avez fondé en 1874 et qui continue à vivre sous un autre nom, grâce à votre patronage et à l'impulsion que vous lui avez donnée.

Digitized by Google

Puisse au moins mon exposé de vos travaux, tout imparfait qu'il est, avoir donné une idée de leur importance et de leur multitude à ceux de mes jeunes auditeurs qui ne peuvent encore les apprécier par eux-mêmes; puisse-t-il leur faire comprendre au prix de quels labeurs incessants, depuis un demi-siècle, vous avez enrichi la science mathématique de tant de vérités nouvelles! Votre vie, en effet, a été consacrée toute entière au travail, aussi bien au milieu des brillantes espérances de votre jeunesse que dans les amertumes et les déceptions de votre âge mûr, ou pendant les années plus paisibles passées en Belgique. Comme on l'a dit de Cauchy, la politique a troublé votre vie, mais elle n'a pu troubler votre honneur, ni ralentir votre passion pour les recherches savantes. Le deuil est venu s'asseoir à votre foyer : la mort vous a ravi vos chers enfants, qui, en ce jour, hélas! ne peuvent que contempler, du haut de leur suprême demeure, l'hommage rendu à leur père. Vous vous êtes courbés sous les coups de la Providence; mais, appuyé sur votre fidèle compagne, vous avez courageusement surmonté votre douleur, et puisant des consolations dans l'étude, vous n'avez cessé de travailler pour la science et pour vos chers élèves, leur donnant ainsi l'exemple d'un dévouement complet à vos devoirs professionnels. C'est par là que vous avez conquis leur estime et leur affection, c'est par là que vous avez conquis celle de ces nombreux amis qui vous entourent aujourd'hui. Ils vont enfin pouvoir vous en donner un témoignage public. Je ne veux plus retarder l'expression de leurs vœux; mais en terminant, laissez-moi vous dire, une fois encore, que les miens vous accompagneront dans votre studieuse retraite, et qu'ils partent d'un cœur profondément dévoué et reconnaissant.

Digitized by Google

OUVRAGES DE M. CATALAN, PUBLIÉS A PART.

Éléments de Géométrie. 1 vol. in-8° (Paris, Bachelier, 1843; Liège, Carmanne, 1865).

Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire. 1 vol. in-8° (Paris, Dunod, 1852; six éditions, la dernière, publiée en 1879).

Traité élémentaire de Géométrie descriptive. 2 vol. in-8° (Paris, Dunod, 1852; cinq éditions, la dernière publiée en 1881).

Manuel du Baccalauréat ès sciences (Paris, Delalain, 1852; douze éditions). 1 vol. in-12, en cinq parties : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Trigonométrie et Géométrie descriptive, Cosmographie, Mécanique.

Manuel des Candidats à l'École polytechnique. 2 vol. in-12 (Paris, Mallet-Bachelier, 1857).

Traité élémentaire des séries. 1 vol. in-8° (Paris, Leiber, 1860).

Cours d'Analyse de l'Université de Liège. 1 vol. in-8° (Liège, 1870; 2e édition, 1880).

Application de l'Algèbre au Code civil. L'Article 757. Broch. in-8° (Paris, Dentu, 1862; 2e édition, 1871).

Histoire d'un concours. Broch. in-8° (Liège, Carmanne, 1865; 2e édition, 1867).

Notions d'Astronomie. 1 vol. in-18 (Bibliothèque utile; trois éditions).

Digitized by Google

SUR

L'ÉQUATION DE RICCATI

ET SA DOUBLE GÉNÉRALISATION (*)

PAR

J. DE TILLY

Membre de l'Académie royale.

INTRODUCTION.

L'équation de Riccati peut être ramenée aisément à l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yx^m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Celle-ci peut être rendue plus générale, soit en remplaçant, au second membre, x^m par une fonction quelconque $F(x)$, ce qui donne l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,F(x);. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

soit, au contraire, en conservant le second membre, mais en remplaçant, au premier, l'indice de différentiation 2 par un indice quelconque n, ce qui conduit à

$$\frac{d^ny}{dx^n} = yx^m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3me série, t. IX, pp. 216-235.

Digitized by Google

On pourrait combiner les deux généralisations, mais on tomberait alors dans des complications dont je ne veux pas m'occuper en ce moment.

L'équation (2) (première généralisation) équivaut à l'équation linéaire complète du second ordre, pour laquelle on ne possède pas encore de méthode d'intégration.

J'ai été conduit, relativement à ce genre d'équations, à un certain nombre de théorèmes que j'ai classés en deux groupes : les théorèmes de *réduction* et les théorèmes d'*équivalence*.

Voici un exemple de théorème de réduction, auquel il est fait allusion dans le § II de cette Note.

On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait résoudre le problème suivant :

Étant donnée l'intégrale de l'équation

$$t'' - t'^2 + kF(x) = 0,$$

ou celle de

$$t'' - t'^2 + F(x) + k = 0,$$

trouver l'intégrale de

$$t'' - t'^2 + F(x) = 0\ (*).$$

Voici maintenant un exemple de théorème d'équivalence :

(*) Dans ce problème, il faut supposer que la fonction $F(x)$ contienne k (si cette constante conserve la forme littérale), sans quoi il suffirait de faire $k = 1$, ou $k = 0$, dans l'intégrale, pour obtenir la solution. Le théorème de réduction dont il s'agit ici, et plusieurs autres, sont démontrés dans deux Notes contenues dans des plis cachetés acceptés par l'Académie (séances du 1er avril et du 5 août 1882).

Digitized by Google

Les trois équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yx^{-4}F(x^{-1})$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yD_x\left[\text{inv.}\int F(x)dx\right]$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables. Ce théorème est démontré dans le § I[er] de la présente Note (*).

(*) A chaque énoncé d'un théorème de réduction correspond l'énoncé d'un théorème d'équivalence *à démontrer*, et réciproquement.

Malheureusement, il paraît difficile d'obtenir deux théorèmes qui se correspondent ainsi et que l'on puisse démontrer.

J'ai cru utile, cependant, de réunir des théorèmes de réduction et des théorèmes d'équivalence, ou, ce qui revient au même, de faire un tableau de formes F qui rendent l'équation (2) intégrable, et d'autres formes qui devraient jouir de cette propriété pour que l'on pût ensuite arriver à l'intégration complète de (2), pour une forme quelconque de F.

Dans la première catégorie se trouveraient, d'après ce qui précède, les formes

$$x^{-4}\frac{\varphi''(x^{-1})}{\varphi(x^{-1})}$$

et

$$D_x\left[\text{inv.}\int\frac{\varphi^{IV}(x)}{\varphi(x)}dx\right];$$

et dans la seconde, les formes

$$k\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

et

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + k.$$

Digitized by Google

Quant à l'équation (3) (seconde généralisation), je n'ai pu l'aborder qu'au moyen des intégrales définies. C'est l'objet principal du § II.

§ I^er^. — *Transformations réciproques des équations différentielles du premier et du second ordre.*

Il existe une transformation remarquable, habituellement nommée *Transformation de Legendre* (*), et qui a été reproduite, avec une interprétation géométrique et d'autres développements intéressants, par M. Orloff (**). Elle consiste à remplacer, dans une équation différentielle du premier ordre, les variables x, y, et $p\left(\frac{dy}{dx}\right)$, par d'autres variables X, Y et P $\left(\frac{dY}{dX}\right)$, choisies de telle manière que

$$x = P$$

et

$$y = PX - Y,$$

ce qui entraîne la relation

$$p = X.$$

C'est ce que j'appellerai, en supprimant les grandes lettres, la transformation de

$$x, y, p,$$

respectivement, en

$$p, px - y, x;$$

(*) Mansion, *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris, 1875 (ou Mémoires couronnés, etc., de l'Académie royale de Belgique, in-8°, t. XXV), p. 42 (note au bas de la page).

(**) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2^e^ série, t. XXXIII, 1872, p. 113.

Digitized by Google

ou, plus simplement, la transformation

$$p,\ px - y,\ x.$$

Cette transformation est dite réciproque, parce que, si on l'applique une seconde fois, on retombe sur l'équation primitive.

J'ignore si l'on a déjà considéré d'autres transformations réciproques, dont les deux premiers termes contiennent la lettre p. On peut en trouver une infinité. Je me bornerai à faire observer que la transformation précédente est un cas très particulier de celle-ci :

$$p\left(\frac{px}{y}\right)^k,\ (px - y)\left(\frac{px - y}{y}\right)^k,\ x\left(\frac{px - y}{px}\right)^k,$$

où k représente une constante quelconque.

En faisant $k = 0$, on retrouve la transformation de Legendre.

J'ai fait cette remarque en essayant de combiner la transformation de Legendre avec cette autre transformation réciproque (accessoire) :

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{y},\ \frac{px^2}{y^2}.$$

En ayant soin d'alterner les deux transformations, on voit que le nombre des combinaisons possibles est infini, et l'on trouve (entre autres) toutes celles que je viens d'indiquer; mais, bien entendu, pour k entier.

La vérification directe montre ensuite que k peut être supposé quelconque.

Si l'on combine

$$p,\ px - y,\ x$$

Digitized by Google

avec la transformation accessoire

$$\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{y^2}{px^2},$$

on arrive à des résultats analogues.

Mais si l'on emploie, comme transformation accessoire :

$$y, x, \frac{1}{p},$$

le résultat est différent. On ne trouve que neuf combinaisons nouvelles (dont cinq seulement contiennent la lettre p dans les deux premiers termes), comme le fait voir le tableau ci-dessous, où q représente $\frac{d^2y}{dx^2}$:

	x	y	p	q
	p	$px - y$	x	$\frac{1}{q}$
1	$\frac{1}{p}$	$-\frac{px - y}{p}$	y	$-\frac{p^3}{q}$
2	$\frac{1}{x}$	$-\frac{y}{x}$	$px - y$	$-x^3q$
3	$\frac{1}{y}$	$-\frac{x}{y}$	$-\frac{px - y}{p}$	$\frac{y^3q}{p^3}$
4	$\frac{1}{px - y}$	$-\frac{p}{px - y}$	$-\frac{y}{x}$	$\frac{(px - y)^3}{qx^3}$
5	$-\frac{p}{px - y}$	$\frac{1}{px - y}$	$-\frac{x}{y}$	$\frac{(px - y)^3}{qy^3}$
6	$-\frac{x}{y}$	$\frac{1}{y}$	$-\frac{p}{px - y}$	$\frac{y^3q}{(px - y)^3}$
7	$-\frac{y}{x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{px - y}$	$\frac{qx^3}{(px - y)^3}$

Digitized by Google

8	$-\frac{px-y}{p}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{p^3}{qy^3}$
9	$px-y$	p	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{qx^3}$
	y	x	$\frac{1}{p}$	$-\frac{q}{p^3}$
	x	y	p	q

Ce tableau donne lieu aux observations suivantes, dont les deux premières servent simplement à en faciliter la construction ou la vérification :

1° Du moment où, dans l'une des colonnes, on rencontre deux termes consécutifs inverses l'un de l'autre, les termes suivants s'obtiennent nécessairement en prenant les inverses des précédents, de manière que deux termes à égale distance de deux inverses soient aussi inverses. Cette circonstance se remarque deux fois dans chaque colonne, mais non sur les mêmes lignes.

2° On a commencé par la transformation principale; si l'on avait fait le contraire, on aurait trouvé le même tableau renversé. De là résulte que la première et la quatrième colonnes doivent seules être construites régulièrement (avec la simplification résultant du 1°); la deuxième et la troisième sont identiques à la première, copiée en sens inverse, en ayant soin de revenir au dernier terme quand on a copié le premier.

3° Les lignes précédées de numéros pairs sont les seules qui constituent de véritables transformations réciproques. Les autres sont composées de deux transformations de cette espèce, mais ne jouissent pas elles-mêmes de la propriété de réciprocité.

4° Si l'on considère deux colonnes quelconques, telles

Digitized by Google

que x et p, x et q, y et p, y et q, p et q, et dans ces deux colonnes les deux fonctions inscrites sur la même ligne, par exemple

$$-\frac{x}{y} \text{ et } \frac{(px-y)^3}{qy^3} \text{ (colonnes } p \text{ et } q, \text{ ligne 5)},$$

on pourra intégrer l'équation

$$\frac{(px-y)^3}{qy^3} = \varphi\left(-\frac{x}{y}\right),$$

quelle que soit la forme de la fonction φ, puisque, par une transformation résultant du tableau lui-même, on peut ramener cette équation à

$$q = \varphi(p).$$

Si les deux colonnes considérées étaient les deux premières, on éviterait en apparence toute intégration, puisque p disparaîtrait, mais aussi l'on n'obtiendrait pas l'intégrale générale.

5° Bornons-nous à indiquer les équations du premier ordre, ayant pour premier membre $px - y$, qui sont intégrables en vertu du tableau, parce que l'on peut en éliminer l'une des variables x, y, p.

I. $$px - y = \varphi(p),$$

équation de Clairaut. C'est la seule que l'on trouve par la comparaison des deux premières colonnes. Elle ne se retrouve plus dans les colonnes suivantes. Mais, pour le motif déjà indiqué, la méthode ne donne pas son intégrale générale.

II. $$px - y = \varphi(x),$$

Digitized by Google

équation linéaire, modifiée par une transformation préalable portant sur la seule variable x.

III. $$px - y = p\varphi(y).$$

IV. $$px - y = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

V. $$px - y = p\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

6° Emploi de la dernière colonne pour essayer d'intégrer les équations suivantes :

$q = yx^m$ (équation de Riccati transformée),
$q = y\mathrm{F}(x)$ (la même équation généralisée).

En employant successivement les diverses transformations 1, 2,...9, on trouve, pour la première équation, le seul cas d'intégration $m = -4$, parce qu'alors l'une des variables disparaît. On n'apprend donc rien de nouveau, en ce qui concerne l'équation de Riccati; cependant, il y a lieu de présenter une remarque sur la transformation 2, la seule qui n'introduise pas la lettre p.

L'équation

$$q = y\mathrm{F}(x)$$

est remplacée par

$$-x^3 q = -\frac{y}{x}\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right),$$

ou

$$q = yx^{-4}\mathrm{F}(x^{-1}).$$

On obtient donc le théorème suivant :

I. — Les deux équations

$$q = y\ \mathrm{F}(x)$$

Digitized by Google

et

$$q = yx^{-4}\mathrm{F}(x^{-1})$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

Cette transformation est réciproque. Pour l'équation de Riccati, elle correspond simplement à la propriété connue du passage de l'exposant m à l'exposant $-m-4$.

Il existe une seconde fonction jouissant de la même propriété que

$$x^{-4}\mathrm{F}(x^{-1}),$$

c'est la suivante :

$$\mathrm{D}_x\left[\mathrm{inv.}\int \mathrm{F}(x)dx\right] (*),$$

et il est possible qu'aucune autre expression monôme ne satisfasse à la même condition. Ainsi, on a ce théorème :

II. — Les deux équations

$$q = y\mathrm{F}(x)$$

et

$$q = y\mathrm{D}_x\left[\mathrm{inv.}\int \mathrm{F}(x)dx\right]$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

Soit, en effet, à intégrer l'équation

$$p + y^2 = \mathrm{F}(x),$$

équivalente, comme on le sait, à

$$q = y\mathrm{F}(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sous le rapport de la possibilité d'intégration.

(*) J'entends ici par inverse d'une fonction $\varphi(x)$, une fonction $\psi(x)$, telle que $\psi[\varphi(x)] = x$, ou que $\varphi[\psi(x)] = x$. Le théorème reste vrai pour ces deux définitions de l'inverse.

Digitized by Google

Si l'on fait $y = z^{-1}$, l'équation devient :

$$\frac{z'}{F(x)} + z^2 = \frac{1}{F(x)}.$$

Posons

$$\int F(x)dx = \varphi(x) = u \text{ (nouvelle variable indépendante),}$$

et appelons ψ la fonction inverse de φ, de manière que

$$\psi[\varphi(x)] = x.$$

En différentiant cette dernière équation, on trouve :

$$\frac{1}{F(x)} = \psi'[\varphi(x)] = \psi'(u),$$

et l'équation en z devient :

$$\frac{dz}{du} + z^2 = \psi'(u),$$

équivalente à

$$q = y\psi'(x),$$

ou à

$$q = yD_x[\text{inv.}\int F(x)dx]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ainsi l'intégration de (5) entraîne celle de (4) et réciproquement.

Remarque. Si l'équation

$$\psi[\varphi(x)] = x$$

à plusieurs solutions :

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots,$$

les équations

$$q = y\psi'(x), q = y\varphi_1'(x), q = y\varphi_2'(x), \ldots$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

La transformation que nous venons d'indiquer est

Digitized by Google

réciproque comme la première. Comme elle aussi, elle n'apprend rien de nouveau en ce qui concerne l'équation de Riccati, car elle correspond, en général, à la propriété connue du passage de l'exposant m à l'exposant $-\frac{m}{m+1}$ (*). Mais les théorèmes I et II (théorèmes d'équivalence) constituent la généralisation des deux propriétés dont la combinaison permet d'intégrer l'équation de Riccati, lorsque l'exposant a la forme $\frac{-4i}{2i \pm 1}$.

Au moyen du théorème II, certaines équations linéaires transcendantes peuvent être ramenées à des équations à coefficients algébriques. Par exemple,

$$y'' = \frac{y}{\cos^2 x} \text{ devient } y'' = \frac{y}{1 + x^2}.$$

§ II. — *Intégration de certaines équations différentielles linéaires au moyen d'intégrales définies.*

Tout le contenu de ce paragraphe est basé sur une remarque fondamentale, due à M. Boussinesq, professeur à la faculté des sciences de Lille (**), et que voici :

« La dérivée première, par rapport à x, de la fonction

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$$

(*) Je dis en *général*, car il y a exception pour $m = -1$. L'équation $y'' = yx^{-4}$ se ramène à $y'' = yx^{-5}$ par le théorème I, et à $y'' = ye^x$ par le théorème II.

(**) *Comptes rendus*, t. XCIV (2 janvier 1882), p. 33. Voir aussi l'ouvrage intitulé : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1885.

Dans tout ce § II, comme dans les travaux analogues d'autres géomètres, on admet, sans discussion, que l'on puisse effectuer les dérivations sous le signe, quoique l'une des limites soit infinie.

Digitized by Google

s'exprime par

$$\int_0^\infty \varphi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha;$$

et, par conséquent, la dérivée seconde de la même fonction a pour expression :

$$\int_0^\infty \varphi'\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha. \text{ »}$$

Considérons d'abord l'équation linéaire du second ordre

$$y'' = abx^m y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

qui dérive de l'équation de Riccati :

$$z' + az^2 = bx^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

lorsque, dans cette dernière, on remplace z par $\frac{y'}{ay}$.

Adoptant la valeur

$$y = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)du, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

on aura :

$$\int_0^\infty \left[\varphi'\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi'\left(\frac{u^2}{2}\right) - abx^m\varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]du = 0,$$

ou :

$$\int_0^\infty \left[\varphi'\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi'\left(\frac{u^2}{2}\right)\right.$$

$$\left. - 2^m ab\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]du = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

Digitized by Google

Déterminons les formes des fonctions φ et ψ par les équations :

$$\varphi'\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)=\alpha\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)^{\frac{m}{2}}\varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right),\ \text{d'où}\ \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)=Ce^{\frac{\alpha\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1}};$$

$$\psi'\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{1}{\alpha}2^m ab\left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\psi\left(\frac{u^2}{2}\right),\ \text{d'où}\ \psi\left(\frac{u^2}{2}\right)=C'e^{\frac{2^m ab\left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}+1}}{\alpha\left(\frac{m}{2}+1\right)}}.$$

L'équation (9) sera vérifiée identiquement et l'équation (6) aura pour solution :

$$y=\int_0^{\infty} e^{\frac{2}{\alpha(m+2)}\left[\alpha^2\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)^{\frac{m}{2}+1}+2^m ab\left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}+1}\right]}du\ (*).\quad (10)$$

Il est facile de démontrer que ce résultat ne devient jamais illusoire, sauf pour $m=-2$, mais je n'insisterai pas sur ce point, parce que l'intégrale que je viens de trouver coïncide avec celle qui a été découverte par Poisson (**).

Elle n'est pas générale, et on ne saurait la rendre telle en la multipliant par une constante, car les deux constantes qu'elle renfermerait alors ne seraient pas indépendantes.

Mais on sait que, pour l'intégration complète d'une équation linéaire du second ordre, la connaissance d'une intégrale particulière suffit (***).

(*) Ce résultat, une fois connu, se vérifie aisément par la différentiation sous le signe $\int$, et l'intégration par parties.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 16e cahier.

(***) On indiquera d'ailleurs, dans la suite de cette Note, une autre manière de compléter l'intégrale, par l'introduction d'imaginaires.

Digitized by Google

Je passe maintenant à un cas plus général, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = yx^m, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

proposée aux géomètres par Lobatto (*), comme un objet de recherches utiles aux progrès de l'Analyse (seconde généralisation).

M. Kummer a résolu cette équation par une méthode bien remarquable (**), mais seulement pour le cas où m est entier et positif.

Depuis, M. Spitzer (***) a étendu cette méthode au cas où m, toujours entier, serait négatif et numériquement plus grand que $2n$.

Or, en suivant la marche que je viens d'indiquer pour l'équation de Riccati, on peut intégrer l'équation (11), ou tout au moins en trouver une solution, pour m quelconque aussi bien que pour m entier.

En effet, si n est pair, l'équation aura la forme

$$\frac{d^{2p} y}{dx^{2p}} = yx^m.$$

En substituant à y la même valeur que plus haut (8), on aura :

$$\int_0^\infty \left[\varphi^{(p)}\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) \psi^{(p)}\left(\frac{u^2}{2}\right) - x^m \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) \psi\left(\frac{u^2}{2}\right) \right] du = 0. \quad (12)$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XVII, p. 371.
(**) *Ibidem*, t. XIX.
(***) *Ibidem*, t. LVII.

Digitized by Google

Posant donc :

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(p)}\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) &= \alpha\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)^{\frac{m}{2}} \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right), \\ \psi^{(p)}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= \frac{2^m}{\alpha}\left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{u^2}{2}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

l'équation (12) sera vérifiée; or les équations (13) sont de même forme que (11) (*) et d'ordre moitié moindre; on sait donc diminuer de moitié l'indice de différentiation des équations linéaires dont il s'agit (quand cet indice est pair), tout en leur conservant leur forme.

Lorsque l'indice sera impair, ou le deviendra dans le courant de la réduction, on l'augmentera d'abord d'une unité, par la méthode de M. Kummer (**), puis on pourra le réduire de moitié, comme cela vient d'être indiqué.

On arrivera donc, en dernière analyse, à un certain nombre d'équations du second ordre, dont la solution a été donnée d'abord.

Il est vrai qu'il faudra, de proche en proche, et à mesure qu'on obtiendra les diverses intégrales définies répondant aux diverses valeurs de n, démontrer que ces intégrales ne deviennent pas illusoires, c'est-à-dire qu'elles peuvent être rendues finies pour de certaines valeurs des quantités littérales qui y jouent le rôle de constantes; mais cette démonstration, habituellement négligée par les géomètres qui emploient les intégrales définies, serait évidemment plus difficile pour n quelconque que pour $n = 2$, et ne

---

(*) Abstraction faite des coefficients constants, qu'il est très facile de faire disparaître.

(**) Il est essentiel d'observer qu'en limitant l'application de la méthode de M. Kummer à la possibilité d'augmenter n d'une unité, on n'a plus besoin de supposer que m soit entier.

Digitized by Google

saurait être faite en détail, pour chaque intégrale, qu'après le développement complet des précédentes.

Si les calculs, sans devenir illusoires, ne donnaient qu'un nombre d'intégrales particulières insuffisant pour reconstituer l'intégrale générale, on pourrait observer que l'une quelconque de ces intégrales,

$$y = \chi(x),$$

conduit généralement à des intégrales distinctes de la première, au moyen de la formule

$$y = \sum_{k=1}^{k=n-1} \alpha_k \chi\left[x\left(\cos\frac{2k\pi}{n+m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n+m}\right)\right],$$

laquelle constituera quelquefois, mais non toujours, l'intégrale générale de (11).

Il ne paraît pas facile d'obtenir cette dernière par une méthode sûre, pour toutes les valeurs possibles de m et de n.

La sommation indiquée pourra évidemment être comprise entre d'autres limites que $k = 0$ et $k = n - 1$.

Enfin, essayons de remplacer x^m par une fonction quelconque $F(x)$, en nous bornant, bien entendu, aux équations du second ordre, c'est-à-dire que nous revenons à la première généralisation de l'équation de Riccati.

Posant :

$$y = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

(où t est une fonction quelconque de x), on a :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty t'\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\varphi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$$

Digitized by Google

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^\infty d\alpha \left[t'^2 \varphi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) + t''\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\varphi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right].$$

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

devient donc :

$$\int_0^\infty d\alpha \left[t'^2 \varphi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) + t''\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\varphi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - F(x)\varphi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Elle ne peut, semble-t-il, se simplifier notablement qu'en posant :

$\varphi(u) = \psi(u) = e^{-u}$ (*), d'où $\varphi'(u) = \psi'(u) = -e^{-u}$.

Alors elle conduit à

$$t'' - t'^2 + F(x) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

et l'intégrale cherchée est

$$y = c\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Mais si l'on avait posé simplement

$$y = c'e^{-t} \text{ (**)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

(*) En posant $\varphi(u) = \psi(u) = e^u$, on trouverait des solutions illusoires, parce que l'intégrale de

$$e^{\frac{t^2}{2\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2}} d\alpha,$$

entre 0 et ∞, est infinie.

(**) Ce qui est la méthode classique, en prenant $t = -\int z dx$.

Digitized by Google

on aurait trouvé la même équation de condition pour déterminer t.

Les deux intégrales particulières

$$y_1 = e^{-t} \quad \text{et} \quad y_2 = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}} d\alpha,$$

où t est supposé avoir la même valeur de part et d'autre, seront *distinctes* ou non, suivant que la quantité

$$y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

se réduira à une constante autre que zéro, ou bien à zéro.

Or, il faut que cette quantité s'annule, sans quoi, en la développant, on déterminerait t', en fonction de t, sans se servir de la forme F, ce qui est absurde.

On a donc toujours :

$$e^{-t} = k \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

et, en déterminant la constante par la formule connue :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

on trouve :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

ce qui est aussi une formule connue, mais moins usuelle que la précédente, et déterminée ici par un procédé qui semble assez curieux (*).

(*) Ce résultat conduit assez facilement, comme Liouville l'a fait voir (et sauf la restriction déjà indiquée, en note, à la première page du § II), à

Digitized by Google

Quoi qu'il en soit, la méthode de transformation échoue, parce qu'elle coïncide exactement avec la méthode classique de réduction au premier ordre. Il faudrait trouver une transformation qui, au lieu de conduire à

$$t'' - t'^2 + F(x) = 0,$$

conduisît à

$$t'' - t'^2 + kF(x) = 0,$$

ou à

$$t'' - t'^2 + F(x) + k = 0.$$

On en déduirait alors des conséquences importantes, au moyen du théorème de réduction mentionné au début de cette Note.

C'est l'équation (15) qui devrait pouvoir s'obtenir sous l'une de ces formes, par exemple au moyen d'une hypothèse plus convenable sur φ et ψ dans l'équation (16), ou par toute autre transformation plus habile. Mais les essais que j'ai tentés dans ce sens n'ont pas réussi.

---

une propriété fondamentale des fonctions Γ, ou intégrales eulérieunes de seconde espèce.

On aurait pu aussi déduire l'équation (21) de l'équation (10), en supposant $m = 0$, et, en général, l'équation (10) pourra conduire à plusieurs résultats intéressants, en y remplaçant m par les diverses valeurs pour lesquelles la théorie ordinaire de l'équation de Riccati fournit des solutions simples.

Digitized by Google

SUR

UNE LACUNE QUI SEMBLE EXISTER

AU DÉBUT DE

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (*)

PAR

M. le major DE TILLY

Membre de la Société scientifique de Bruxelles.

---

1. La théorie de la mesure exacte des objets à trois dimensions, comprenant l'étude de la position relative de leurs diverses parties et la détermination de leurs éléments principaux (autant que possible avec la règle et le compas), me semble devoir constituer un complément, peut-être même une introduction, sinon indispensable, du moins très utile, des cours de géométrie descriptive.

Cette dernière science doit, comme son nom l'indique, décrire les objets; mais pourquoi ne décrirait-elle que des objets idéaux, au lieu des objets réels?

Je m'explique en prenant un cas à la fois simple et probant : l'épure de l'ellipsoïde de révolution. Celui qu'on représente est un ellipsoïde idéal ou en projet, c'est-à-dire dont on donne les axes. Pourquoi ne représente-t-on pas un ellipsoïde donné, existant, matériel? Je l'ignore, mais c'est peut-être parce qu'il faudrait commencer par mesurer les axes, et que cela embarrasse.

Pour la sphère, le cas est prévu. Avant même d'apprendre la géométrie descriptive, on a résolu ce problème élémentaire :

Étant donnée une sphère solide, construire son rayon.

Mais pour un ellipsoïde, et en général pour un corps quelconque donné matériellement, comment faut-il exécuter son dessin

---

(*) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 9e année, 1885-1886.

Digitized by Google

sans faire d'*hypothèses* (ou en faisant le moins d'hypothèses possible) sur ses dimensions ou sur ses formes, mais en appliquant les instruments sur les solides aussi bien que sur le plan, comme on le fait pour le problème simple que je viens de rappeler?

J'ai traité cette question, d'abord dans une instruction (autographiée pour l'École militaire) sur les levers du matériel et sur le dessin géométrique; ensuite, en ce qui concerne spécialement les surfaces du second degré et leurs combinaisons, dans plusieurs articles de la *Nouvelle correspondance mathématique*.

J'ai montré, le premier, je pense (*), que la détermination géométrique complète, exécutée dans les éléments pour la sphère, peut aussi s'exécuter rigoureusement, avec la règle et le compas, pour le cylindre et le cône du second degré, l'ellipsoïde et l'hyperboloïde de révolution.

2. Mes réflexions sur les bases de la géométrie descriptive étaient déjà anciennes, mais elles me sont revenues à l'esprit en lisant les premières pages du nouveau cours de géométrie descriptive de l'École militaire, par le capitaine du génie Chomé.

L'auteur explique, d'après Monge, pourquoi il est plus avantageux de déterminer un point par ses distances à trois plans (ce qui est, au fond, le procédé de la géométrie descriptive) que par ses distances à trois points. Ce serait l'occasion, me semble-t-il, de faire observer que si cet avantage existe en général, c'est-à-dire pour toutes les constructions intermédiaires entre les données et les résultats, il en est autrement lorsqu'il s'agit de transporter les données, de l'objet à trois dimensions sur le plan de l'épure et aussi de transporter, le cas échéant, les résultats de l'épure sur l'objet à trois dimensions.

Alors il faut nécessairement déterminer chaque point par ses distances à trois autres points, parce que la distance entre deux points est la seule qui se mesure directement sur un solide, au moyen des instruments usuels.

En admettant cette idée, on donne au mot *descriptive* sa signi-

---

(*) Voir, toutefois, ce qui est dit plus loin, en note, à propos du principe II.

Digitized by Google

fication complète, sans être obligé de supposer que toute application de cette science commence et finisse par un tâtonnement, ou par un à peu près.

8. Pour transporter les données de l'objet à trois dimensions sur le plan de l'épure, on se servira des principes suivants :

I. Un point quelconque O d'une figure peut être projeté sur le plan déterminé par trois points A, B, C de cette figure, en décrivant, dans le plan ABC (ou dans tout autre plan où les points A, B, C seront reportés avec leurs distances mutuelles), trois circonférences ayant respectivement pour centres ces trois points et pour rayons les distances AO, BO, CO, mesurées dans l'espace; le point unique, intersection des trois cordes, communes à ces trois circonférences considérées deux à deux, sera la projection du point O sur le plan ABC (*).

Par deux points du plan de projection, A et B par exemple, on peut faire passer un second plan, qui sera déterminé, dans l'espace, par A, B et un troisième point arbitraire D.

Nous pourrons supposer alors que l'on prenne les deux plans dont nous venons de parler comme plans de projection. On les représentera dans le dessin, rabattus l'un dans le prolongement de l'autre, AB formant la ligne de terre, et l'on exécutera géométriquement comme ci-dessus, la représentation de l'objet par autant de points que l'on voudra, sur les deux plans, si cette double représentation est jugée utile.

On pourra construire l'angle des deux plans de projection, au moyen d'un simple triangle rectangle, en observant que le point D, situé dans le second plan, peut être projeté sur le premier, d'après la méthode indiquée.

Si l'on veut que les plans de projection soient perpendiculaires entre eux, ou aussi pour pouvoir utiliser les connaissances que

(*) On le voit immédiatement par l'intersection de trois sphères, mais on peut aussi recourir aux rabattements, comme on le fait, dans les traités, pour construire le quatrième sommet d'un tétraèdre, dont on donne la base et les longueurs des arêtes. Seulement, il résulte de notre étude que ce problème, au lieu de figurer parmi les applications, devrait logiquement prendre place au début de la géométrie descriptive.

Digitized by Google

l'on posséderait sur la nature géométrique de l'objet à décrire, il faudra employer un second principe.

II. Étant donnée une figure à trois dimensions, on peut, en général, trouver sur cette figure autant de points que l'on veut, appartenant à un même plan, en décrivant de deux points quelconques, comme centres, deux courbes sphériques de même rayon, se coupant sur la surface donnée, puis répétant la construction avec autant de rayons différents que l'on voudra. Tous les points d'intersection obtenus appartiendront à un même plan. Il suffira d'en construire trois pour déterminer le plan; mais il sera souvent avantageux d'en construire davantage, par exemple cinq, lorsque le plan coupera la surface donnée suivant une section conique (*).

Pour obtenir, sur l'objet, deux plans de projection perpendiculaires entre eux, on déduira, d'un premier couple de points AB, un second couple A'B', tel que AB et A'B' soient perpendiculaires entre elles (en direction). Alors les plans respectivement normaux au milieu de AB et au milieu de A'B' (plans obtenus comme ci-dessus, principe II), seront deux plans perpendiculaires représentés sur l'objet. A' et B' sont dans l'un des plans de projection. La ligne de terre passe par le milieu de A'B' et est perpendiculaire à cette droite. On peut, d'ailleurs, la construire dans chaque plan de projection séparément, en y projetant deux points de l'autre, puis mettre les deux projections en concordance.

4. La construction des projections sur les deux plans choisis se fera au besoin par points, mais on pourra la simplifier et la compléter au moyen des indications que l'on possédera sur la nature géométrique de l'objet à représenter, ou de quelques-unes de ses parties.

L'objet peut comprendre, d'abord, des droites, des cercles, des plans, etc.

Examinons un certain nombre de cas plus compliqués, en

(*) Dans l'intervalle entre la remise de cette note et la correction des épreuves, M. Mansion m'a fait observer que le principe II a été employé par Pappus, pour trouver le diamètre d'un cylindre de révolution, étant donnée une partie de la surface.

Digitized by Google

cherchant à déterminer les éléments principaux des figures dans l'espace, ce qui en donnera évidemment une représentation plus complète et plus utile que si l'on ne projetait (d'après les principes précédents) que des points isolés, même en grand nombre.

5. Étant donnée une sphère solide, trouver son rayon (*). Cherchant, d'après le principe II, trois points dans un même plan, il se trouve que ce plan est celui d'un grand cercle; donc le rayon s'obtient immédiatement. C'est à peu près la solution du *Traité de géométrie* de M. Catalan.

6. Étant donné un cylindre dont la base est une courbe du second ordre, construire une génératrice passant par un point pris sur la surface.

Construisons (II) les projections A', B', C', D', E' de cinq points A, B, C, D, E du cylindre, situés dans un plan. Sur ce même plan projetons (I) cinq autres points du cylindre, situés dans un autre plan.

Cherchons, avec la règle et le compas, les centres O, O' des deux sections (ou les sommets, s'il s'agit de paraboles).

Soit M' la projection du point M, donné sur le cylindre.

Par M', menons une parallèle à la droite OO', et déterminons, avec la règle et le compas, l'intersection N' de cette parallèle avec la section conique A'B'C'D'E'.

Rapportons N' en N, au moyen de ses distances aux points A', B', C'; MN sera la génératrice demandée.

7. Étant donné un tronc de cône dont les bases, situées dans des plans parallèles, sont des courbes du second ordre, construire la génératrice qui passe par un point M, pris sur la surface conique.

Construisons, dans un plan, l'une des courbes de base, par cinq points; puis projetons (I) cinq points de l'autre, sur le plan de la première.

Déterminant, avec la règle et le compas, les centres de ces

(*) La solution de ce problème (comme je l'ai déjà fait observer) se trouve dans tous les traités de géométrie, mais presque toujours, elle est trop particulière au cas de la sphère, et non susceptible de généralisation.

Digitized by Google

sections projetées (ou les sommets, si ce sont des paraboles), et joignant par une droite ces points homologues, on aura un premier lieu sur lequel se trouve la projection du sommet du cône.

Pour en avoir un second, on mènera par les centres (ou sommets) projetés, deux parallèles quelconques; on déterminera leurs intersections avec les courbes de base, projetées, et l'on joindra ces intersections.

Ayant ainsi le sommet projeté, on le joindra par une droite, à la projection M′ du point donné; on déterminera l'intersection N′ de cette droite avec la première base construite; on reportera N′ en N sur le cône : MN sera la génératrice demandée.

Si les deux droites, lieux géométriques du sommet projeté, se coupaient en dehors du dessin, la droite qui joint ce sommet projeté au point M′ pourrait cependant être construite par une méthode bien connue.

Dans ces trois problèmes simples (5, 6, 7,) j'ai opéré de manière à n'employer qu'un seul plan de projection; c'est d'ailleurs la cause unique des restrictions qui subsistent encore dans les énoncés; mais, quelque compliqué que soit le problème, s'il est susceptible d'une solution, celle-ci s'obtiendra toujours par l'emploi des deux plans de projection, en opérant comme dans les exemples suivants.

8. *Problème auxiliaire.* Reporter, par autant de points qu'on voudra, sur la figure dans l'espace, un plan représenté dans l'épure.

Construisons, sur la figure dans l'espace, trois sections planes, chacune par un nombre suffisant de points (cinq, si ce sont des coniques, comme nous le supposerons) (*), puis représentons dans l'épure les plans de ces sections, ainsi que les droites suivant lesquelles ces derniers plans sont coupés par le plan donné.

Construisons aussi, avec la règle et le compas, les intersections respectives de ces trois droites avec les trois coniques dans les plans desquelles elles sont situées.

Enfin, reportons ces six points, ou seulement cinq d'entre eux,

(*) Dans les autres cas, la construction avec la règle et le compas serait, généralement impossible.

Digitized by Google

sur la figure dans l'espace, chacun au moyen de ses distances aux autres points de la même conique, déjà représentés.

9. Étant donnée une portion quelconque d'une surface conique (ou cylindrique) du second ordre, mener une génératrice par un point donné et représenter complètement la surface.

On construira une conique sur la surface (II); on construira son plan dans l'épure (I); par un point quelconque pris sur la surface, et reporté sur l'épure, on mènera, dans cette dernière, un plan parallèle au précédent ; on reportera ce plan sur la surface (8). On se trouvera alors dans les mêmes conditions qu'au n° 7.

On pourra représenter complètement les surfaces données, par exemple le cylindre par sa section droite, le cône par une section quelconque et le sommet.

10. Étant donné un ellipsoïde de révolution solide, trouver la grandeur de ses axes et la position de ses sommets.

Déterminons, comme ci-dessus, deux sections parallèles, tant sur l'épure que sur la surface; joignons leurs centres dans l'épure; par la droite obtenue, menons un plan, que nous reporterons sur la surface (8) par cinq points; cherchons, dans l'épure, les intersections de la droite avec la section conique des cinq points. Ces deux points sont les extrémités d'un diamètre.

Prenons, dans l'épure, le milieu de leur distance. Ce sera le centre.

Imaginons une sphère concentrique à l'ellipsoïde et passant par un point pris sur sa surface.

Nous pourrons, dans l'épure, déterminer neuf points de l'intersection de cette sphère avec l'ellipsoïde, par l'intermédiaire de plans sécants, passant par le centre et reportés sur la surface (8); car les points de rencontre d'une section conique déterminée, avec une circonférence concentrique, s'obtiennent avec la règle et le compas.

Des neuf points obtenus, cinq au moins seront dans un même plan. Menant par le centre, dans l'épure, une perpendiculaire à ce plan, puis déterminant ses intersections avec l'ellipsoïde, par l'intermédiaire d'un plan sécant, on connaîtra l'axe de révolution et ses deux sommets, que l'on reportera sur l'ellipsoïde.

Digitized by Google

On achèvera en menant, par le centre, un plan perpendiculaire à l'axe obtenu, et en cherchant le rayon de la section.

11. Étant donnée une portion quelconque d'un hyperboloïde de révolution, à une nappe, trouver la grandeur de ses axes, la position du cercle de gorge, et construire les deux génératrices passant par un point donné.

On opérera comme dans le problème précédent pour déterminer les axes, la position du cercle de gorge sur l'épure, et reporter sur la surface autant de points que l'on voudra de ce cercle.

Projetant sur son plan le point donné; menant, par cette projection, deux tangentes au cercle, et joignant les points de contact au point donné, on aura les deux génératrices demandées, sur l'épure.

On reportera sur la surface un point quelconque de chacune de ces génératrices, assez voisin du point donné pour qu'il tombe dans la portion de surface existante.

12. Pour un ellipsoïde à trois axes inégaux (et à plus forte raison pour des surfaces plus compliquées), je ne vois pas le moyen d'opérer en n'employant que la règle et le compas; mais on pourra toujours, par un calcul aussi précis que l'on voudra, fixer la position des axes et les dessiner.

Parmi tous les moyens possibles, je signalerai le suivant.

On construira trois diamètres conjugués, et aussi trois diamètres rectangulaires entre eux, aussi facilement que si l'ellipsoïde était de révolution (*).

Dès lors, les longueurs a, b, c, des demi-axes, seront liées entre elles par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} abc &= m \\ a^2 + b^2 + c^2 &= n \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

m, n, p étant des quantités construites.

(*) La différence n'apparaît que quand on cherche l'intersection de l'ellipsoïde avec une sphère concentrique.

Digitized by Google

On pourra résoudre ces équations aussi approximativement que l'on voudra. Il suffira, évidemment, de connaître l'une des trois valeurs a, b, ou c, pour pouvoir en déduire les deux autres en n'employant plus que la règle et le compas; si l'on veut, non seulement obtenir les longueurs des axes, mais en outre construire ceux-ci à leur place dans le dessin, c'est l'axe moyen b qu'il faut calculer de préférence (*).

En effet, la sphère de rayon b coupe l'ellipsoïde suivant deux cercles, dont on pourra construire autant de points que l'on voudra, par l'intermédiaire de plans sécants, comme nous l'avons fait pour l'ellipsoïde de révolution.

On pourra donc construire les plans cycliques de l'ellipsoïde et, les plans bissecteurs de leurs dièdres étant les plans des axes, le reste s'achèvera comme si l'ellipsoïde était de révolution.

13. Il serait très intéressant d'examiner à fond s'il n'existe aucun moyen de faire toute la construction avec la règle et le compas. Il ne suffit pas, pour établir le contraire, d'observer que les équations (1) ci-dessus ont pour résultante une équation du troisième degré, car, outre les constructions que l'on peut faire dans le plan de l'épure sur les données m, n, p, on dispose toujours de l'ellipsoïde solide, sur lequel on pourrait imaginer une construction plus ou moins ingénieuse, conduisant à des données nouvelles. Le doute peut donc subsister dans le cas de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et à plus forte raison pour d'autres surfaces plus compliquées, mais les surfaces du second ordre, de révolution, se laissent décrire complètement avec la règle et le compas.

14. Quelquefois, dans les surfaces du second ordre, la nature du problème rendra inutile la connaissance des axes, et alors on pourra résoudre avec la règle et le compas, même quand ces surfaces ne seront pas de révolution. En voici un exemple :

(*) Au premier abord, il semblerait encore plus avantageux de résoudre par rapport à a ou à c, mais la sphère ayant a ou c pour rayon serait tangente à l'ellipsoïde et la détermination géométrique des points de contact (dans l'épure) serait impossible.

Digitized by Google

Étant donnés deux solides formant un seul système invariable et limités par des surfaces du second ordre, à centres; construire avec la règle et le compas, la distance des centres de ces surfaces (*).

Tout revient, évidemment, à construire les deux surfaces dans une même épure; or, les principes posés précédemment n'impliquent nullement que les points déterminant les plans de projection soient choisis sur la surface même à représenter : il suffit qu'ils y soient reliés d'une manière invariable. On pourra donc, dans une même épure, construire les deux centres, comme aux nos 10 et 11, puis l'on mesurera leur distance.

15. Les constructions dont nous avons parlé dans les numéros précédents pourront servir, non seulement à représenter les objets, ou à résoudre sur eux certains problèmes, mais aussi à reporter les résultats sur la figure dans l'espace. Ici encore des circonstances particulières peuvent faciliter le report des points, mais le seul procédé général consiste à mesurer leurs distances à des points déjà reportés et à décrire des courbes sphériques sur la figure dans l'espace. L'emploi de trois courbes sphériques constituera le cas ordinaire; deux suffiront dans le cas exceptionnel où ces courbes n'auront qu'un point d'intersection sur l'objet à représenter et où il n'y aura, d'ailleurs, aucun doute sur la correspondance de ce point avec celui du dessin; enfin il faudra quatre courbes dans le cas, également exceptionnel, où les points d'intersection des trois sphères employées d'abord appartiendraient tous les deux à l'objet à représenter.

(*) Ce problème est propo é, comme application, dans certains traités de géométrie, mais seulement pour deux sphères.

Bruxelles. — F. Hayez imp. de l'Acad. royale.

Digitized by Google

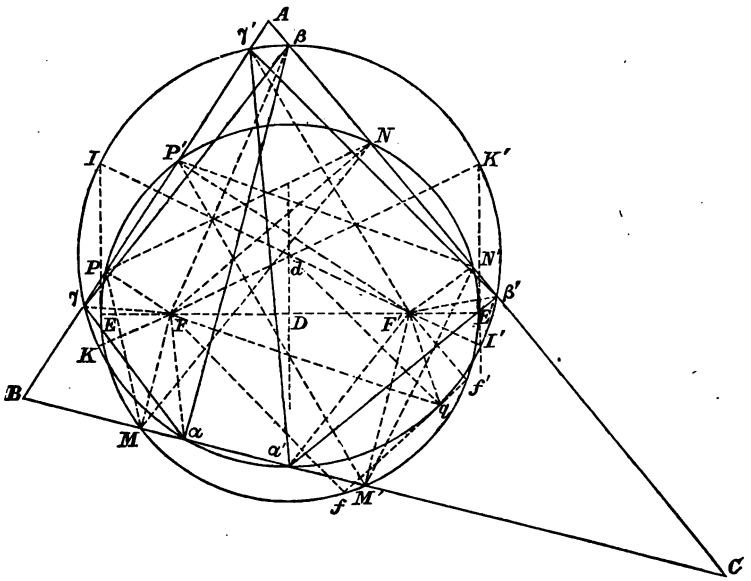
Sur les Figures Semblablement Variables.

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Université de Liège.

[*Extracted from the Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XVI., No.* 244.]

M. H. M. Taylor, dans les *Proc. of the Lond. Math. Soc.*, Vol. XV., p. 122, a signalé des relations fort intéressantes entre les intersections d'un cercle avec les côtés d'un triangle. La présente Note a pour objet de préciser et de compléter ces relations en les rattachant à la théorie des figures semblablement variables et à celle des podaires obliques d'un foyer d'une conique.

1. Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle variable sous les conditions de rester constant de forme et inscrit au triangle fixe ABC. Les cercles circonscrits aux triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ se coupent en un même point F, tel que



$$\beta F\gamma = \pi - A, \quad \gamma Fa = \pi - B, \quad aF\beta = \pi - C,$$

$$BFC = BFa + CFa = B\gamma a + C\beta a = \pi - B - Ba\gamma + \pi - C - Ca\beta = A + a,$$

$$AFC = B + \beta, \quad AFB = C + \gamma.$$

Ces égalités montrent que le point F est fixe par rapport au triangle donné ABC et par rapport au triangle mobile $\alpha\beta\gamma$.

Donc, *lorsqu'un triangle $\alpha\beta\gamma$ reste semblable à lui-même et inscrit à un triangle fixe ABC, il existe un point du triangle mobile qui est fixe ; ce point est celui d'où l'on voit les côtés de $\alpha\beta\gamma$ sous des angles supplémentaires*

Digitized by Google

*de ceux de ABC, et les côtés de ABC sous des angles respectivement égaux aux sommes des angles correspondants des deux triangles.**

2. Menons FM, FN, FP perpendiculaires à BC, CA, AB. Le triangle MNP est une position particulière de $\alpha\beta\gamma$; c'est le minimum de $\alpha\beta\gamma$.

Soit θ l'angle $\alpha FM = \beta FN = \gamma FP$. Si l'on fait tourner le système des trois droites FM, FN, FP autour de F de l'angle θ et qu'on prenne les intersections avec BC, CA, AB, on aura les sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Plus généralement, étant tracées une figure S dans le plan MNP et la figure semblable σ dans le plan $\alpha\beta\gamma$, on transforme S en σ en faisant tourner S de l'angle θ autour de F et en modifiant les distances des points de S au point F dans le rapport $\cos\theta : 1$.

Autrement dit, on passe de S à σ en construisant, sur les droites joignant F aux différents points de S, des triangles rectangles semblables ayant en F le même angle θ.

De là résulte que, si D et d sont deux points homologues par rapport à MNP et $\alpha\beta\gamma$, le triangle dFD est semblable à αFM. Donc tout point du plan mobile MNP décrit une droite. En particulier, si D est le centre du cercle MNP, le centre d du cercle $\alpha\beta\gamma$ décrit une droite perpendiculaire à FD.

F est un *centre permanent de similitude* du triangle mobile $\alpha\beta\gamma$.

Deux lignes homologues quelconques des figures S et σ sont dans le rapport $\cos\theta : 1$.

3. On sait qu'une tangente quelconque à une parabole, limitée à deux tangentes fixes, est vue du foyer sous un angle supplémentaire de celui des tangentes fixes ; la réciproque de ce théorème est également vraie. Si on applique cette proposition aux angles MFN, NFP, PFM tournant autour de F, on voit que *les côtés* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *du triangle mobile* $\alpha\beta\gamma$ *enveloppent trois paraboles touchant deux côtés du triangle ABC et ayant pour foyer commun le point F ;* les sommets de ces courbes sont les projections de F sur les lignes NP, PM, MN.

Plus généralement, toute droite de la figure S enveloppe une parabole de foyer F ; car deux points de cette droite décrivent des droites (2°), et la distance de ces points est vue de F sous un angle constant.

4. Le cercle MNP rencontre les côtés de ABC en trois nouveaux points M', N', P', qui sont les projections du point F' symétrique de F par rapport au centre D. Les points F, F' sont les foyers d'une conique U inscrite au triangle ABC ; le cercle MNP est la podaire de F et F' par rapport à U, le diamètre EFE' du cercle est un axe de U ; le second axe de U est dirigé suivant la droite Dd.

Soient α', β', γ' les intersections de BC, CA, AB avec le cercle $\alpha\beta\gamma$.

* Voir *Nouvelles Annales*, t. XVII., p. 48 ; *Nouvelle Correspondance*, t. VI., pp. 65, 72, 219, 321 ; *Mathesis*, t. I., p. 106.

Digitized by Google

Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ reste toujours semblable à lui-même, lorsque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est constant de forme, car on a

$$\alpha+\alpha' = B+C, \quad \beta+\beta' = C+A, \quad \gamma+\gamma' = A+B,$$

α, β, etc. désignant les angles des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$. Il est intéressant d'observer que

$$BFC = \alpha+A = \pi-\alpha', \quad CFA = \pi-\beta', \quad AFB = \pi-\gamma',$$
$$BF'C = \alpha'+A = \pi-\alpha, \quad CF'A = \pi-\beta, \quad AF'B = \pi-\gamma.$$

F' est le centre permanent de similitude du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$.

Le cercle MNP est le lieu des projections des points F, F' sur les tangentes à la conique U (podaire de F et F'). Si l'on mène par F des droites faisant dans le même sens avec les tangentes à U l'angle $\frac{1}{2}\pi-\theta$, le lieu des extrémités de ces droites sera le cercle $\alpha\beta\gamma$, dont le centre d est sur le second axe de U; l'angle $dFD = \theta$. Mais l'angle $dFD = dF'D$; donc le même cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est aussi le lieu des projections de F' sur les tangentes à U, les projetantes faisant avec ces tangentes l'angle $\frac{1}{2}\pi-\theta$.

On peut énoncer autrement ces résultats : *Si les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ tournent respectivement autour de F et F' avec la même vitesse angulaire, mais en sens contraire, leurs sommets sont toujours sur une même circonférence.*

5. Le cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ a pour diamètres les droites II', KK', qui passent par les foyers F, F' et sont limitées aux tangentes menées par les sommets E, E' de l'ellipse U.

Je dis que ce cercle touche l'ellipse U. En effet, soit dQ l'une des normales menées de d à U; cette droite est la bissectrice de l'angle FQF', et la perpendiculaire ff' à dQ par le point Q est tangente à U. La circonférence circonscrite au triangle QFF' passe nécessairement par d; car les lignes dQ et dD passent toutes deux par le milieu de l'arc sous-tendu par la corde FF' de ce cercle. Il en résulte que

$$FQf = FdD = \frac{\pi}{2}-\theta, \quad F'Qf' = F'dD = \frac{\pi}{2}-\theta;$$

donc Q est la projection de F ou F' sur ff', les projetantes faisant l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$ avec ff'; par suite Q est un point du cercle $\alpha\beta\gamma$.

D'après cela, *la conique U est l'enveloppe du cercle $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$.*

6. Examinons maintenant deux cas particuliers remarquables.

I. Lorsque $\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = C,$

on a $\alpha' = \pi-2A, \quad \beta' = \pi-2B, \quad \gamma' = \pi-2C,$

$$BFC = \alpha+A = 2A, \quad BF'C = \alpha'+A = \pi-A, \text{ etc.}$$

Le point F est le centre du cercle circonscrit à ABC et le point de

Digitized by Google

concours des hauteurs de $\alpha\beta\gamma$; F' est le point de concours des hauteurs de ABC et le centre du cercle inscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$. Le cercle MNP est celui des neuf points de ABC.

II. Supposons $\alpha = B, \quad \beta = C, \quad \gamma = A;$

alors $\alpha' = C, \quad \beta' = A, \quad \gamma' = B,$

$$BFC = \alpha + A = B + A = \pi - C, \quad BF'C = \alpha' + A = \pi - B, \text{ etc.},$$

F et F' sont les points de Brocard de ABC; les points de contact de U avec BC, CA, AB sont les pieds des symédianes de ABC. F est aussi un point de Brocard de $\alpha\beta\gamma$, F' un point de Brocard de $\alpha'\beta'\gamma'$.

7. Soient $A'B'C'$ le triangle formé par les droites $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, et $A''B''C''$ le triangle formé par les droites $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\beta'$. M. Taylor a démontré que les directions des côtés de ces triangles sont constantes, et que ces triangles ont, avec ABC, un même centre d'homologie O.

Les distances de O aux côtés de ABC sont inversement proportionnelles aux produits

$$\sin\alpha \sin\alpha', \quad \sin\beta \sin\beta', \quad \sin\gamma \sin\gamma'.$$

Les droites AO, BO, CO rencontrent BC, CA, AB aux points de contact de U; car on trouve ces points en faisant coïncider α avec α', β avec β', γ avec γ'.

Lorsque $\alpha = B, \quad \beta = C, \quad \gamma = A,$

O est le centre des symédianes de ABC; les côtés de $A'B'C'$ sont parallèles à ceux de ABC; les côtés de $A''B''C''$ sont parallèles aux tangentes menées par A, B, C au cercle ABC.

Lorsque $\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = C,$

et que M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c sont les milieux des côtés et les pieds des hauteurs du triangle ABC, les côtés du triangle $A'B'C'$ sont parallèles aux droites M_bH_c, M_cH_a, M_aH_b, et ceux de $A''B''C''$ sont parallèles aux droites M_cH_b, M_aH_c, M_bH_a. Les distances du point O aux côtés du triangle ABC sont inversement proportionnelles aux produits $\sin A \sin 2A$, $\sin B \sin 2B$, $\sin C \sin 2C$. La ligne AO et le rayon du cercle ABC qui passe par A rencontrent BC à des distances égales de M_a, etc.

Si les triangles $A'B'C'$ ou $A''B''C''$ se réduisent à ce point O, on a le théorème suivant: Par le point O, on mène trois droites parallèles à M_bH_c, M_cH_a, M_aH_b (ou à M_cH_b, M_aH_c, M_bH_a); les points d'intersection de ces droites avec les côtés du triangle ABC sont situés, six sur une circonférence et trois sur une droite.

London: Printed by C. F. Hodgson & Son, 1 Gough Square, Fleet Street.

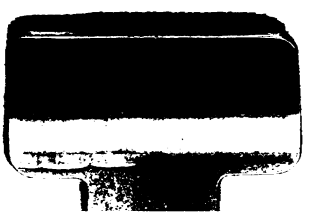
MAR 17 1921

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06853 6633



Digitized by Google